

1. La competenza matematica dei quindicenni

Rossella Garuti, Marta Herbst, Mauro Valer

Questo capitolo presenta i risultati degli studenti quindicenni in Matematica. La Matematica costituisce l'ambito principale in PISA 2012, dopo che era stata studio principale nel 2003. Nella presentazione dei risultati la Matematica assume quindi un ruolo centrale. Nel capitolo vengono illustrate la definizione di competenza matematica relativa al quadro di riferimento del 2012, la sua articolazione, le modalità di costruzione delle prove e di presentazione dei risultati. I risultati degli studenti dell'Alto Adige/Südtirol vengono presentati nel quadro internazionale e poi vengono analizzati più in dettaglio a livello nazionale, per gruppo linguistico e la tipologia di scuola frequentata. Nell'ultima parte del capitolo vengono illustrati alcuni elementi relativi agli atteggiamenti, alle motivazioni e alle strategie di apprendimento degli studenti nei confronti della Matematica e al ruolo del docente che emergono dall'indagine PISA 2012.

2.1. La definizione di *literacy* matematica in PISA 2012

Il quadro di riferimento per la Matematica di PISA 2012 illustra le basi teoriche della valutazione PISA per la Matematica e presenta una nuova definizione formale di *literacy* matematica, i processi matematici che gli studenti utilizzano quando attingono alla propria *literacy* matematica e le competenze matematiche di base che sottendono tali processi. La valutazione delle competenze matematiche è particolarmente rilevante nel quadro di PISA 2012, poiché la Matematica rappresenta il principale ambito di valutazione. Sebbene già valutata nei cicli PISA 2000, 2003, 2006 e 2009, solamente nel 2003 la Matematica ha rappresentato l'ambito di indagine principale.

Il quadro di riferimento di PISA 2012 si propone di descrivere in una forma più chiara ed esplicita la Matematica rilevante per studenti quindicenni, garantendo al tempo stesso che gli *item* sviluppati rimangano inseriti in contesti autentici e significativi. Il ciclo di modellizzazione matematica, già utilizzato nei quadri di riferimento precedenti (OECD, 2004) per descrivere i passaggi seguiti dagli studenti nella risoluzione di problemi contestualizzati, rimane uno degli elementi fondamentali del quadro di riferimento di PISA 2012; esso viene utilizzato per aiutare a definire i processi matematici utilizzati dagli studenti nel risolvere i problemi.

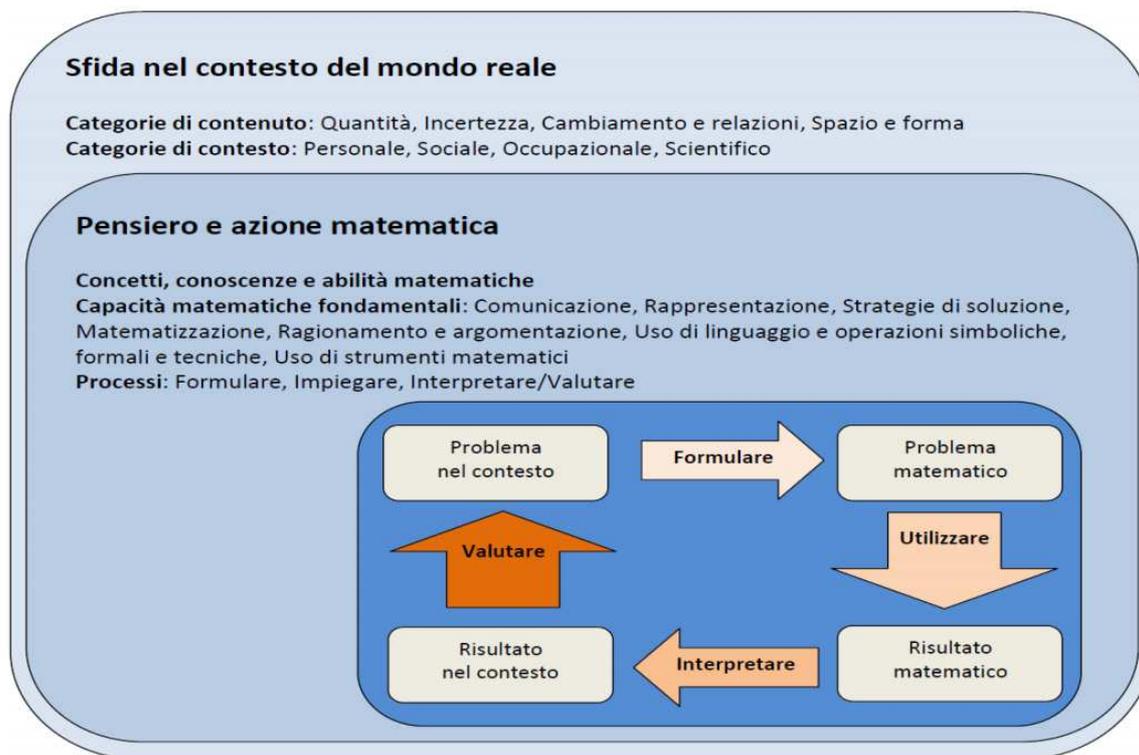
Nell'ambito di PISA 2012, la *literacy* matematica viene definita come segue:

“la *literacy* matematica è la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la Matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la Matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo” (OECD, 2013).

2.1.1. Il ciclo della matematizzazione

Il linguaggio utilizzato per la definizione di *literacy* matematica è incentrato su un coinvolgimento attivo in Matematica e comprende la formulazione di un ragionamento matematico e l'utilizzo di concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere determinati fenomeni. Il linguaggio mira inoltre a integrare nella definizione di *literacy* matematica per il ciclo 2012 la nozione di modellizzazione matematica, da sempre uno dei capisaldi del quadro di riferimento di PISA per la matematica (OCSE, 2004). Dato che gli studenti usano la matematica e gli strumenti matematici per risolvere problemi contestualizzati, il loro lavoro prevede una serie di passaggi. La figura 2.1 mostra una panoramica dei principali costrutti del presente quadro di riferimento e indica le relazioni esistenti tra essi.

Abb./fig.: 1.1 - Il ciclo della matematizzazione



Fonte: OECD, (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem solving and Financial Literacy*, PISA, OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264190511-en.

Il riquadro esterno mostra che la *literacy* matematica si esprime nel contesto di una sfida o di un problema che ha origine nel mondo reale. In questo quadro di riferimento, i problemi vengono caratterizzati sulla base di due elementi. Le categorie di contesto (personale, sociale, professionale e scientifico) identificano gli ambiti della vita da cui emergono i problemi e le quattro categorie di contenuto matematico (*Quantità, Incertezza e dati, Cambiamento e relazioni e Spazio e forma*) che intervengono nella risoluzione matematica di problemi.

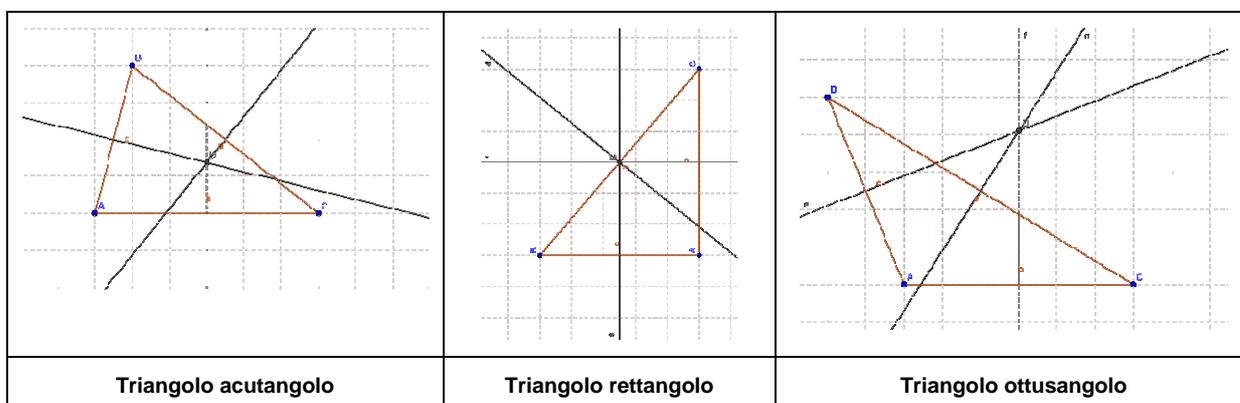
Un esempio può essere utile per comprendere i processi coinvolti nella risoluzione di un problema contestualizzato:

Il lampione

Il consiglio comunale ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l'intero parco sia illuminato. Dove dovrebbe essere collocato il lampione? (OCSE, 2004).

Chi risolve il problema cerca di individuare gli aspetti matematici rilevanti della situazione e *formula* la situazione in forma matematica basandosi sui concetti, sulle relazioni individuati e sulle ipotesi semplificatrici formulate. Dopo di che trasforma il “problema contestualizzato” in un “problema matematico”, gestibile dunque in modo matematico. Occorre localizzare il punto in cui mettere il lampione e quindi immaginare di rappresentare il parco come un triangolo e l'illuminazione di un lampione come un cerchio con il lampione posto al centro. Il problema viene quindi riformulato in: “localizzare il centro del cerchio circoscritto al triangolo”. A questo punto chi risolve il problema utilizza concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per ottenere “risultati matematici”. Questo passaggio prevede generalmente l'applicazione di un ragionamento matematico, manipolazione, trasformazione, calcolo e costruzioni geometriche. Nel nostro caso, poiché il centro di un cerchio circoscritto a un triangolo giace nel punto di incontro degli assi dei lati del triangolo, occorre costruire gli assi di due lati del triangolo. Il loro punto di intersezione è il centro del cerchio. Le soluzioni matematiche possono essere diverse (fig. 2.2), ma i “risultati matematici” devono essere *interpretati* in base al problema originale (“risultati contestualizzati”). Occorre ragionare sulla soluzione e riconoscere che se uno dei tre angoli fosse ottuso, la soluzione non sarebbe appropriata, poiché il lampione dovrebbe essere collocato fuori dal parco e illuminerebbe una zona ben più ampia del parco triangolare, come anche se fosse un triangolo rettangolo, nel qual caso il lampione sarebbe collocato su un lato del parco. Occorre anche riconoscere che l'ubicazione e la dimensione degli alberi nel parco sono altri fattori che influiscono sull'utilità della soluzione matematica. Questo processo implica un'*interpretazione* e una *valutazione* dei risultati matematici da parte di chi risolve il problema e un giudizio circa la plausibilità degli stessi nel contesto di un problema basato sul mondo reale.

Abb./fig.: 1.2 - Soluzioni matematiche del problema del lampione



I processi di *formulazione, utilizzazione, interpretazione* sono elementi fondamentali sia del ciclo di modellizzazione matematica sia della definizione di *literacy* matematica.

Il ciclo di modellizzazione è uno degli aspetti fondamentali della concezione di PISA che vede gli studenti come soggetti attivi nella risoluzione di problemi; tuttavia non è sempre necessario effettuare tutti i passaggi di tale ciclo, soprattutto nell'ambito di una valutazione (Niss et al., 2007). Accade spesso infatti che parti importanti del ciclo di modellizzazione matematica siano già state svolte da altri e che l'utente finale compia solamente alcuni passaggi del ciclo di modellizzazione. Per esempio, in alcuni casi, le rappresentazioni matematiche, come i grafici o le equazioni, sono fornite già pronte per essere manipolate direttamente per rispondere a domande o trarre conclusioni. È per questo motivo che molti degli *item* PISA comprendono solamente alcuni passaggi del ciclo di modellizzazione. Nei fatti, può accadere che chi risolve il problema passi da un processo all'altro, tornando indietro per rivedere decisioni già prese o ipotesi già formulate in precedenza. Ciascuno dei processi può presentare sfide notevoli, pertanto potrebbero essere necessarie diverse iterazioni all'interno del ciclo.

2.1.2. Il ruolo degli strumenti matematici in PISA 2012

La definizione di *literacy* matematica include esplicitamente l'uso di strumenti matematici. Tali strumenti comprendono apparecchiature fisiche e digitali, software e dispositivi di calcolo. Gli strumenti matematici informatizzati sono di uso corrente nei luoghi di lavoro del XXI secolo e lo saranno sempre di più in futuro. La natura dei problemi connessi al mondo del lavoro e del ragionamento logico si è estesa a queste nuove opportunità, dando adito a maggiori aspettative in relazione alla *literacy* matematica.

La valutazione informatizzata della matematica è un elemento di assoluta novità in PISA 2012 ed è proposta in opzione ai paesi partecipanti¹. Il riferimento a strumenti matematici nella definizione di *literacy* matematica risulta pertanto particolarmente appropriato. L'uso della calcolatrice è stato consentito in tutte le indagini PISA di Matematica che si sono svolte fino ad oggi laddove le politiche dei paesi partecipanti lo consentivano. Poiché gli *item* PISA riflettono problemi che emergono in contesti personali, professionali, sociali e scientifici e le calcolatrici sono spesso utilizzate in tali contesti, una calcolatrice è di aiuto in alcuni degli *item* PISA. La valutazione computerizzata permette di inserire una più ampia gamma di strumenti matematici quali software statistici, applicazioni per la visualizzazione e costruzione geometrica e strumenti di misurazione virtuali negli *item* di valutazione. Questo riflette le potenzialità del mezzo che sempre più persone utilizzano nel risolvere i problemi, e permette altresì di valutare alcuni aspetti della *literacy* matematica difficilmente valutabili attraverso le tradizionali prove scritte.

¹ L'Italia ha partecipato con un campione di 265 scuole

2.1.3. Le dimensioni alla base della costruzione della prova di Matematica

Ai fini della valutazione, la definizione di *literacy* matematica del ciclo 2012 può essere analizzata sulla base di tre aspetti fra loro connessi:

- i *processi* matematici che descrivono ciò che fanno gli studenti per collegare il contesto del problema alla matematica e quindi risolvere il problema, e le capacità soggiacenti a tali processi;
- il *contenuto* matematico da utilizzare nei quesiti proposti;
- i *contesti* ai quali i quesiti fanno riferimento.

Processi

Secondo la definizione, la *literacy* matematica è la capacità di una persona di *formulare, utilizzare e interpretare* la Matematica in svariati contesti. Questi tre termini (*formulare, utilizzare e interpretare*) costituiscono una struttura utile e significativa per l'organizzazione dei processi matematici messi in atto dagli studenti quando devono collegare il contesto di un problema alla Matematica e risolvere tale problema. Per la prima volta, l'indagine 2012 riporta i risultati della Matematica sulla base di tali processi².

Il termine *formulare* si riferisce alla capacità degli studenti di riconoscere e individuare le opportunità di usare la Matematica e di fornire una struttura matematica a un problema presentato in forma contestualizzata. Gli studenti mettono in atto un processo di traslazione da un contesto reale a un ambito matematico e conferiscono al problema una struttura, una rappresentazione e una specificità di tipo matematico. Il termine *utilizzare*, presente nella definizione, fa riferimento alla capacità degli studenti di applicare concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici per risolvere problemi. Durante questo processo gli studenti mettono in atto tutti i procedimenti necessari per arrivare alla soluzione di un problema (ad esempio utilizzando calcoli aritmetici, manipolazioni simboliche, estrapolando informazioni da grafici, rappresentando forme nello spazio, ecc.). Il termine *interpretare* ai sensi della definizione di *literacy* matematica si riferisce alle capacità degli studenti di riflettere su soluzioni, risultati o conclusioni matematiche e di interpretarle nel contesto del mondo reale. Prevede il passaggio dal problema matematico al contesto reale del problema per comprendere se i risultati siano plausibili e sensati nella situazione data. Gli studenti impegnati in questo processo saranno sollecitati a fornire spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema riflettendo sul processo di modellizzazione e valutando i risultati ottenuti.

Dieci anni di esperienza nello sviluppo degli *item* PISA e nell'analizzare come gli studenti rispondono a tali *item* hanno dimostrato che esiste una serie di capacità matematiche fondamentali che stanno alla base di ciascuno dei processi riferiti e dell'applicazione pratica della *literacy* matematica. Il lavoro di Niss e dei suoi colleghi danesi (Niss, 2003) ha evidenziato otto capacità, definite "competenze" da Niss nel

² Dal 2013 anche i risultati delle prove INVALSI sono restituiti sulla base di questi stessi processi: *formulare, utilizzare e interpretare*.

quadro di riferimento del 2003 (OCSE, 2004), strumentali al comportamento matematico. Il quadro di riferimento 2012 utilizza una formulazione modificata di questa serie di capacità, riducendone il numero da otto a sette. Queste capacità cognitive sono disponibili o acquisibili dagli studenti al fine di comprendere e affrontare il mondo in modo matematico o di risolvere problemi. Quando il livello di *literacy* matematica di uno studente migliora, questi sarà in grado di fare affidamento in misura sempre maggiore sulle capacità matematiche fondamentali. Pertanto, una maggiore attivazione delle capacità matematiche fondamentali va di pari passo con l'aumento della difficoltà degli *item*. Questa considerazione è stata utilizzata quale base per le descrizioni dei diversi livelli di *literacy* matematica già nei precedenti cicli PISA.

Tali capacità intervengono in ciascuno dei tre processi matematici usati per la presentazione dei risultati. La tavola 2.1 riassume il modo in cui tali capacità si rivelano all'interno dei processi.

Tab./tav.: 1.1 - Relazione tra processi matematici e capacità matematiche fondamentali

	Formulazione di situazioni in forma matematica	Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici	Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici
Comunicazione	Leggere, decodificare e interpretare affermazioni, domande, compiti, oggetti, immagini o animazioni (nella valutazione computerizzata) al fine di creare un modello mentale della situazione	Articolare una soluzione, illustrare il lavoro necessario per arrivare alla soluzione e/o riassumere e presentare i risultati matematici intermedi	Elaborare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema
Matematizzazione	Identificare le variabili e le strutture matematiche soggiacenti al problema reale e formulare delle ipotesi per poterle utilizzare	Utilizzare la comprensione del contesto per orientare o organizzare il processo matematico di risoluzione, ad es. lavorare con un livello di precisione adeguato al contesto	Comprendere la portata e i limiti di una soluzione matematica derivanti dall'impiego di un determinato modello matematico
Rappresentazione	Creare una rappresentazione matematica delle informazioni del mondo reale	Dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema	Interpretare i risultati matematici in diversi formati in relazione alla situazione o all'utilizzo; confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione a una situazione
Ragionamento e argomentazione	Spiegare, difendere o giustificare la rappresentazione della situazione reale elaborata o individuata	Spiegare, difendere o giustificare il processo e i procedimenti usati per determinare un risultato o una soluzione di natura matematica. Collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica, elaborare generalizzazioni o creare argomentazioni a più livelli	Riflettere sulle soluzioni matematiche ed elaborare spiegazioni e argomentazioni che supportino, confutino o qualifichino una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi	Selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica	Attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta a una soluzione, conclusione o generalizzazione matematica	Elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni	Utilizzare variabili, simboli, diagrammi e modelli standard adeguati al fine di rappresentare un problema reale attraverso un linguaggio simbolico/formale	Comprendere e utilizzare costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali; utilizzare algoritmi	Comprendere la relazione esistente tra il contesto del problema e la rappresentazione della soluzione matematica. Usare tale comprensione per orientare l'interpretazione della soluzione nel contesto e determinarne la plausibilità e le possibili limitazioni
Utilizzo di strumenti matematici	Usare strumenti matematici per riconoscere le strutture matematiche o per delineare relazioni matematiche	Conoscere e saper utilizzare adeguatamente i diversi strumenti che possono essere utili durante i processi e i procedimenti finalizzati alla ricerca delle soluzioni	Usare strumenti matematici per accertare la plausibilità di una soluzione matematica ed eventuali sue limitazioni e restrizioni in base al contesto del problema

Contenuti

L'obiettivo è di valutare la *literacy* matematica e a questo proposito viene proposta una struttura organizzativa per la conoscenza della matematica basata sui fenomeni matematici che stanno alla base di ampie classi di problemi e che hanno motivato lo sviluppo di concetti e procedimenti matematici specifici. Ad esempio, fenomeni matematici come l'incertezza e il cambiamento si riferiscono a numerose situazioni che si verificano di frequente e per le quali sono state sviluppate strategie e strumenti matematici adeguati alla loro analisi.

L'elenco delle categorie di contenuto presentato di seguito viene dunque utilizzato in PISA 2012 nel rispetto dell'evoluzione storica, per coprire adeguatamente l'ambito della Matematica e i fenomeni soggiacenti che ne hanno motivato lo sviluppo nonché per riflettere sulle grandi branche dei programmi scolastici:

- *Cambiamento e relazioni*
- *Spazio e forma*
- *Quantità*
- *Incerteza e dati*³

Queste quattro categorie permettono di organizzare l'ambito della matematica in modo tale da garantire una ripartizione degli *item* in tutto l'ambito e sono incentrate su fenomeni matematici importanti, ma al tempo stesso evitano una suddivisione troppo dettagliata che andrebbe contro alla volontà di proporre problemi ricchi e stimolanti basati su situazioni reali. Una classificazione basata sul contenuto è importante per lo sviluppo e la selezione degli *item* e per elaborare una relazione dei risultati della valutazione, ma è bene sottolineare che alcuni contenuti specifici potrebbero essere inseriti in più di una categoria.

L'area di contenuto *Cambiamento e relazioni* si riferisce allo studio dei mutamenti tipici di molti fenomeni naturali e di grandezze tra le quali intercorrono relazioni descrivibili matematicamente mediante funzioni. Le relazioni matematiche assumono a volte la forma di equazioni o disequazioni anche se spesso intervengono altre rappresentazioni (algebriche, grafiche, tabellari e geometriche). Il passaggio da una rappresentazione all'altra ha spesso grande importanza in quest'area di contenuto.

L'area di contenuto *Spazio e forma* si riferisce a problemi spaziali e geometrici che si incontrano nello studio delle proprietà degli oggetti e delle loro posizioni reciproche. Le formule di misurazione sono fondamentali in quest'ambito. La manipolazione e l'interpretazione di forme contestualizzate che richiedono l'utilizzo di strumenti che vanno dai software di geometria dinamica ai GPS sono comprese in questa categoria.

L'area di contenuto *Quantità* riflette la necessità di quantificare per organizzare la realtà. Per procedere alla quantificazione del reale occorre comprendere misurazioni, conteggi, grandezze, unità, indicatori, dimensioni relative, tendenze e modelli numerici. Componenti essenziali per il ragionamento quantitativo sono: il senso del numero, le diverse rappresentazioni numeriche, il significato delle operazioni e gli ordini di grandezza dei risultati.

³ Chi già conosce i quadri di riferimento precedenti noterà che la categoria *Incerteza* prende ora il nome di *Incerteza e dati*.

L'area di contenuto *Incertezza e dati* comprende lo studio di fenomeni combinatori, probabilistici e statistici e le relative rappresentazioni. La presentazione e interpretazione dei dati sono concetti fondamentali per questa categoria.

Le quattro aree di contenuto possono essere ricondotte ai classici capitoli della Matematica quali: Algebra, Geometria, Aritmetica, Probabilità e Statistica e quindi ad argomenti che si strutturano i curricula scolastici⁴.

Contesti

Un aspetto importante della *literacy* matematica è che la Matematica serve a risolvere problemi situati in un contesto inteso come è l'aspetto del mondo reale di una persona in cui si colloca il problema. La scelta di appropriate strategie e rappresentazioni matematiche spesso dipende dal contesto in cui il problema insorge. Per il quadro di riferimento 2012 per la Matematica sono state definite quattro categorie di contesti, utilizzate per classificare le prove di valutazione messe a punto per l'indagine:

- *Personale*: sono i contesti più immediatamente legati alla vita e all'esperienza corrente dello studente.
- *Occupazionale*: i problemi classificati in questa categoria riguardano il mondo del lavoro.
- *Sociale*: i problemi riguardano la comunità cui appartiene un individuo. Richiedono allo studente di osservare alcuni aspetti dell'ambiente che lo circonda.
- *Scientifico*: i problemi che rientrano in questa categoria riguardano l'applicazione della matematica al mondo naturale e temi e argomenti pertinenti alla scienza e alla tecnologia. Gli *item* di carattere intra-matematico, dove tutti gli elementi presenti appartengono al mondo della matematica, ricadono nella categoria di contesto scientifico.

Consideriamo come esempio il quesito *Pizze* per descrivere i diversi elementi con i quali sono classificati i quesiti PISA nel quadro di riferimento del 2012.

Pizze

Una pizzeria prepara due pizze dello stesso spessore, ma di diverse dimensioni. La più piccola ha un diametro di 30 cm e costa 30 zed. La più grande ha un diametro di 40 cm e costa 40 zed.

Qual è la pizza più conveniente? Come sei arrivato/a alla risposta?

⁴ Nel Quadro di riferimento INVALSI le quattro aree di contenuto sono identificate come: *Relazioni e funzioni*, *Spazio e figure*, *Numeri*, *Dati e previsioni*.

Informazioni quesito Pizze

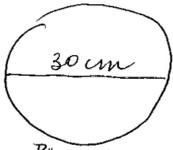
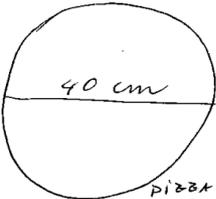
Contesto	Personale
Ambito	Cambiamento e relazioni
Processo	Formulare
Formato	A risposta aperta articolata

Il quesito *Pizze* a risposta aperta articolata, è semplice nella forma, ma ricco di contenuto e illustra vari elementi del quadro di riferimento per la matematica. Somministrato per la prima volta nel ciclo PISA 1999, è stato quindi pubblicato a fini esemplificativi e dal 2003 appare come esempio in ogni versione del quadro di riferimento per la Matematica. È risultata essere una delle prove più difficili tra quelle della prova sul campo per l'indagine 1999, con solo l'11% di risposte corrette. *Pizze* si situa in un contesto personale che potrà risultare familiare a molti quindicenni. La categoria di contesto è personale perché si tratta di trovare quale pizza sia più conveniente per l'acquirente in termini economici. Non è difficile alla lettura, di conseguenza permette agli studenti di concentrarsi quasi completamente sugli aspetti matematici del compito. Si tratta di interpretare matematicamente degli elementi del mondo reale (rotonda, stesso spessore, dimensioni diverse). La variabile dimensione è definita matematicamente dai diametri delle due pizze. I prezzi sono espressi nella moneta fittizia zed. Dimensione e prezzo sono legati dal concetto "*prezzo più conveniente*". Vi è un elemento geometrico che andrebbe classificato nella categoria di contenuto *Spazio e forma*. Le pizze possono essere modellate come sottili cilindri circolari, quindi entra in gioco l'area del cerchio. La domanda rientra anche nella categoria di contenuto *Quantità* considerata l'implicita necessità di raffrontare la quantità di pizza con l'importo in denaro. Tuttavia, la questione principale è la concettualizzazione delle relazioni tra le proprietà delle pizze e il modo in cui le proprietà pertinenti cambiano dalla pizza più grande alla più piccola. Essendo questi gli aspetti centrali del problema, l'*item* è classificato nella categoria di contenuto *Cambiamento e relazioni*. Questo *item* rientra nella categoria di processo *Formulazione*. Il passaggio chiave per la soluzione del problema, il più difficile sul piano cognitivo, è la formulazione di un modello matematico che integri il concetto di prezzo più conveniente. Lo studente deve comprendere che, essendo lo spessore della pizza in principio uniforme, ed essendo questo identico nelle due pizze, occorre concentrare l'analisi sulla superficie circolare delle pizze e non sul volume o la massa. La relazione tra quantità di pizza e importo in denaro è così traslata nel concetto di prezzo più conveniente trasformato come '*costo per unità di superficie*'. Una variante possibile è "*superficie per costo unitario*". In termini matematici, il prezzo più conveniente può essere calcolato direttamente e quindi raffrontato per i due cerchi, ed è inferiore per il cerchio più grande. L'interpretazione traslata nel mondo reale è che la pizza più grande ha il costo più vantaggioso.

Un altro ragionamento, che mostra anche più chiaramente la classificazione dell'*item* nella categoria *Cambiamento e relazioni*, consiste nel postulare (esplicitamente o implicitamente) che l'area del cerchio aumenta in proporzione al quadrato del diametro, ossia nella proporzione di $\left(\frac{4}{3}\right)^2$, mentre il prezzo aumenta solo nella proporzione di $\left(\frac{4}{3}\right)$. Dato che $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ è maggiore di $\left(\frac{4}{3}\right)$, la pizza più grande è più conveniente.

La principale difficoltà e chiave di soluzione del problema è la formulazione cioè l'individuazione della struttura matematica che consente di risolvere il quesito, pertanto l'*item* rientra nella categoria di processo *formulazione* di situazioni in forma matematica. Tuttavia sono presenti anche aspetti degli altri due processi matematici. Il modello matematico, una volta formulato, deve essere utilizzato in modo efficace, secondo un ragionamento adeguato, applicando le pertinenti conoscenze matematiche e il calcolo della superficie e del rapporto. Dopo di che il risultato va interpretato in relazione alla domanda originale.

Abb./fig.: 1.3 - Esempio di risposta – Pizze

FORMULARE Lo spessore è circa lo stesso, quindi confronto le aree

UTILIZZARE

$$\text{Pizza 1.} = \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 15 = 706,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Pizza 2} = \pi r^2 = \pi \cdot 20 \cdot 20 = 1256 \text{ cm}^2$$

FORMULARE

$$\text{COSTO per cm}^2 \text{ Pizza 1} = \frac{30,2 \text{ €}}{706,5 \text{ cm}^2} = 0,04 \text{ €/cm}^2$$

$$\text{Pizza 2} = \frac{40,2 \text{ €}}{1256 \text{ cm}^2} = 0,03 \text{ €/cm}^2$$

INTERPRETARE Per Pizza 2 è più economica al cm², quindi è più conveniente.

2.1.4. La costruzione della prova di Matematica

I quesiti sono stati scelti per ricoprire al meglio le diverse dimensioni del quadro di riferimento fin qui descritte. Le prove PISA per la matematica sono costituite e da unità che comprendono materiale di stimolo testuale e spesso altre informazioni in forma di tabelle, grafici, mappe o diagrammi, più uno o più *item* collegato(i) a questo stimolo. Questo formato permette di coinvolgere gli studenti in un contesto o problema rispondendo a una serie di *item* correlati, ma indipendenti.

Nella tabella 2.2 la distribuzione dei quesiti rispetto alle categorie di contesto, contenuto e processo.

Tab./tav.: 1.2 - Distribuzione dei quesiti rispetto alle categorie del quadro di riferimento della *literacy* matematica

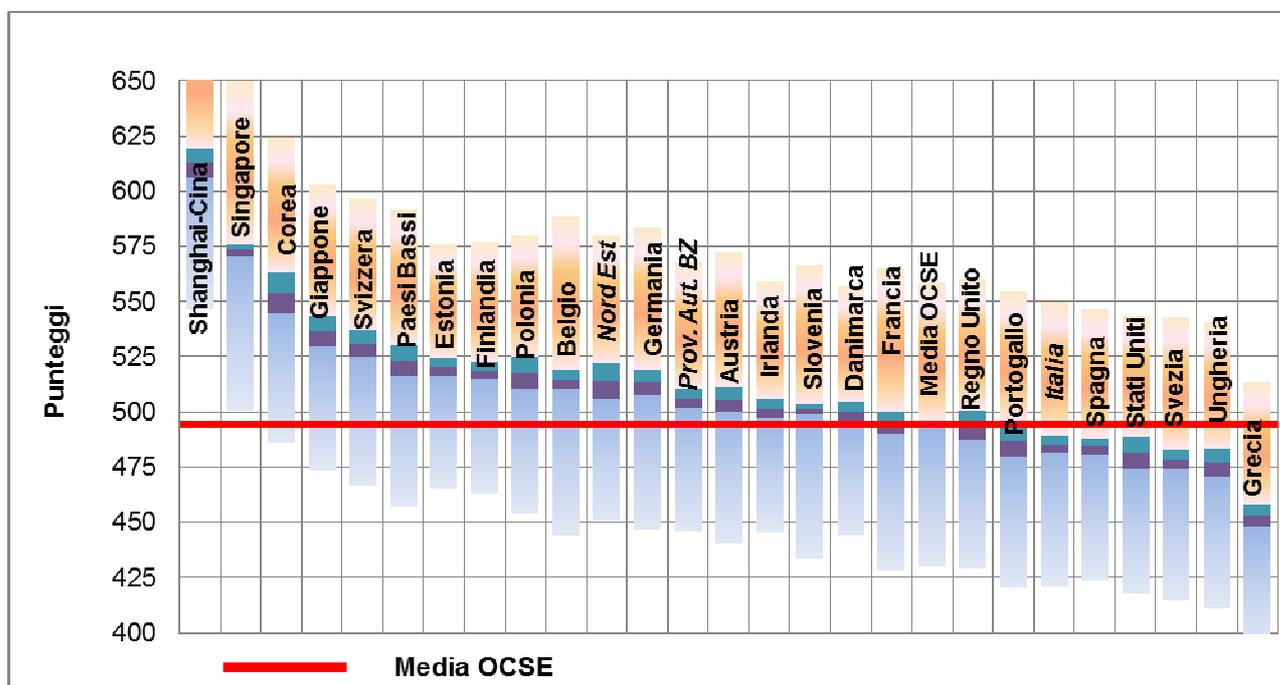
Categorie	Percentuale di distribuzione
Contesti <ul style="list-style-type: none">• Personale• Occupazionale• Sociale• Scientifico	25 25 25 25
Contenuti <ul style="list-style-type: none">• Quantità• Spazio e forme• Cambiamenti e relazioni• Incertezza e dati	25 25 25 25
Processi <ul style="list-style-type: none">• Formulare• Utilizzare• Interpretare/valutare	25 50 25

2.2. I risultati generali della *literacy* matematica in Alto-Adige/Südtirol

2.2.1. Comparazione con altre nazioni e con la media OCSE

La figura 2.4 mostra una comparazione dei risultati medi di competenza matematica rispetto ad alcuni paesi, in particolare dell'area europea e di alcune nazioni asiatiche oltre agli Stati Uniti. Nel grafico la linea rossa rappresenta la media dei paesi OCSE (494), mentre il punteggio medio di ogni paese è rappresentato da un rettangolo bicolore che ha un'area tanto maggiore quanto maggiore è l'intervallo di confidenza. Ad esempio la Corea ha un risultato medio di 554 con un errore standard (E.S.)⁵ di 4,6, infatti si colloca al di sopra della media OCSE con una variabilità dei risultati maggiore ad esempio della Finlandia (E.S. 1,9). Possiamo osservare che la Provincia Autonoma di Bolzano ottiene risultati in Matematica superiori alla media OCSE (506, E.S. 2,1) con una differenza statisticamente significativa poiché si colloca al di sopra della linea rossa. Il Regno Unito non ha risultati statisticamente diversi dalla media OCSE. L'Italia nel suo complesso (485, E.S. 2,0) si colloca al di sotto della media OCSE in modo statisticamente significativo in quanto tutto il rettangolo è al di sotto della linea rossa. La tabella 2.3 riporta i valori numerici (punteggio ed errore standard dei paesi rappresentati nel grafico).

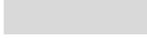
Abb./fig.: 1.4 - Punteggi medi dei paesi su scala globale di competenza matematica



⁵ ERRORE STANDARD

Tab./tav.: 1.3 - Valori numerici – competenza matematica

STATO	MATEMATICA	E.S.
Shanghai-Cina	613	(3,3)
Singapore	573	(1,3)
Corea	554	(4,6)
Giappone	536	(3,6)
Svizzera	531	(3,0)
Paesi Bassi	523	(3,5)
Estonia	521	(2,0)
Finlandia	519	(1,9)
Polonia	518	(3,6)
Belgio	515	(2,1)
Nord Est	514	(4,1)
Germania	514	(2,9)
Prov. Aut. BZ	506	(2,1)
Austria	506	(2,7)
Irlanda	501	(2,2)
Slovenia	501	(1,2)
Danimarca	500	(2,3)
Francia	495	(2,5)
Media OCSE	494	(0,5)
Regno Unito	494	(3,3)
Portogallo	487	(3,8)
Italia	485	(2,0)
Spagna	484	(1,9)
Stati Uniti	481	(3,6)
Svezia	478	(2,3)
Ungheria	477	(3,2)
Grecia	453	(2,5)

Legenda	
	significativamente superiore alla media OCSE
	differenza rispetto alla media OCSE non significativa
	significativamente inferiore alla media OCSE

2.2.2. Comparazione con le regioni italiane e per gruppi linguistici

Nel grafico 2.5 la comparazione sui risultati di Matematica è fatta a livello nazionale: regioni, macro-aree e all'interno della Provincia Autonoma di Bolzano per gruppi linguistici. La linea verticale rappresenta la media italiana pari a 485 (E.S. 2,0). In genere, le macro-aree e le regioni con i risultati migliori tendono ad avere barre più allungate a destra dell'intervallo di confidenza della media italiana e meno a sinistra, il che indica che, a parità di posizione nella graduatoria dei punteggi, gli studenti di quelle aree e regioni possiedono competenze più elevate. Ad esempio, in Veneto, il punteggio raggiunto dallo studente che si trova al 95° percentile, cioè all'estremo superiore, della distribuzione dei punteggi è di 668 punti e quello ottenuto dallo studente che si trova al 5° percentile, dunque all'estremo inferiore della distribuzione, è di 372 punti; per contro gli studenti che in Calabria occupano le stesse posizioni raggiungono, rispettivamente, un punteggio di 574 e di 286 punti.

Abb./fig.: 1.5 - Distribuzione punteggi medi in Matematica per regione e gruppi linguistici Prov. Aut. di Bolzano

Ripartizione geografica

NORD OVEST

Valle D'Aosta

Piemonte

Liguria

Lombardia

NORD EST

Prov. Aut. BZ

Prov. Aut. BZ it.

Prov. Aut. BZ dt.

Prov. Aut. BZ lad.

Prov. Aut. TN

Veneto

Friuli-Venezia Giulia

Emilia-Romagna

CENTRO

Toscana

Umbria

Marche

Lazio

SUD

Abruzzo

Molise

Campania

Puglia

SUD e ISOLE

Basilicata

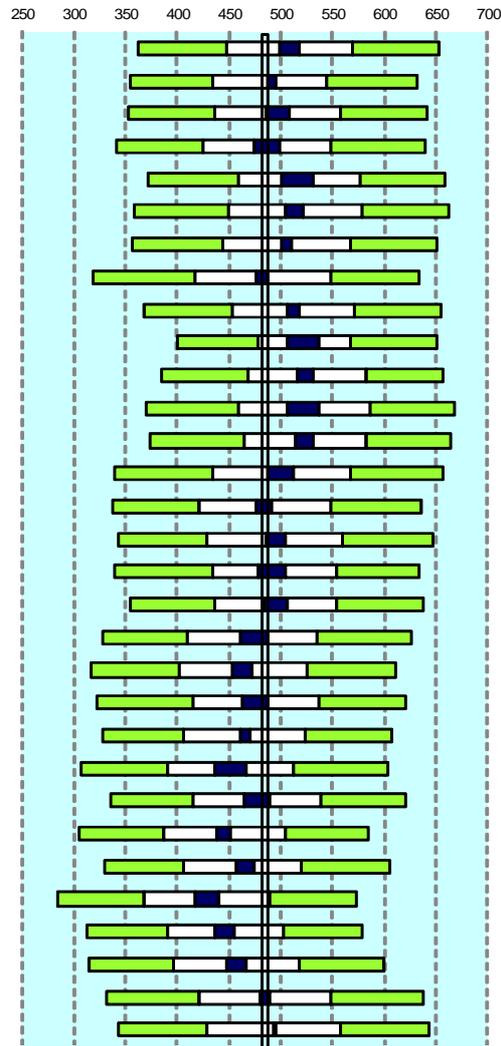
Calabria

Sicilia

Sardegna

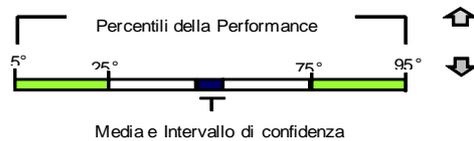
ITALIA

OCSE



Media (e.s.)

509 (5,0)	↑
492 (2,2)	
499 (5,8)	
488 (6,2)	
517 (7,6)	↑
514 (4,1)	↑
506 (2,1)	↑
483 (3,2)	
513 (2,6)	↑
523 (7,8)	↑
524 (4,1)	↑
523 (7,6)	↑
523 (4,4)	↑
500 (6,4)	
485 (3,8)	
495 (4,9)	
493 (6,8)	
496 (5,5)	
475 (6,8)	
464 (4,4)	↓
476 (6,4)	
466 (2,3)	↓
453 (7,7)	↓
478 (6,1)	
446 (3,2)	↓
466 (4,3)	↓
430 (5,7)	↓
447 (5,1)	↓
458 (5,3)	↓
485 (2,0)	
494 (0,5)	↑



Media significativamente superiore alla media dell'Italia
Media significativamente inferiore alla media dell'Italia

La Provincia Autonoma di Bolzano si colloca al di sopra della media italiana con un punteggio medio di 506 punti (E.S. 2,1) non significativamente diverso dalla macro-area del Nord-Est che ha un punteggio medio di 514 punti (E.S. 4,1), ma al di sotto del risultato della Provincia Autonoma di Trento che ottiene un punteggio di 524 punti (E.S. 4,1). All'interno della Provincia Autonoma di Bolzano la suddivisione per gruppi linguistici mostra che il risultato in Matematica degli studenti di lingua ladina (lad.) hanno un punteggio di 523 punti (E.S. 7,8) con una variabilità elevata dovuta al numero esiguo degli studenti del campione; gli studenti di lingua tedesca (dt.) ottengono in matematica un punteggio medio di 513 punti (E.S. 2,6) e gli studenti di lingua italiana (it.) un punteggio medio di 483 punti (E.S. 3,2) e la differenza fra i risultati è statisticamente significativa.

Interessante è il confronto fra l'estremo superiore e quello inferiore della distribuzione dei punteggi dei tre gruppi linguistici. Gli studenti che si collocano al 95° percentile, cioè all'estremo superiore, hanno punteggi che si discostano poco l'uno dall'altro: 635 punti (it.), 656 (dt.) 652 (lad.), mentre le differenze maggiori si riscontrano nell'estremo inferiore della distribuzione, cioè tra i punteggi degli studenti che si collocano al 5° percentile: 320 (it.), 369 (dt.), 401 (lad.), quindi tra gli studenti con minori competenze.

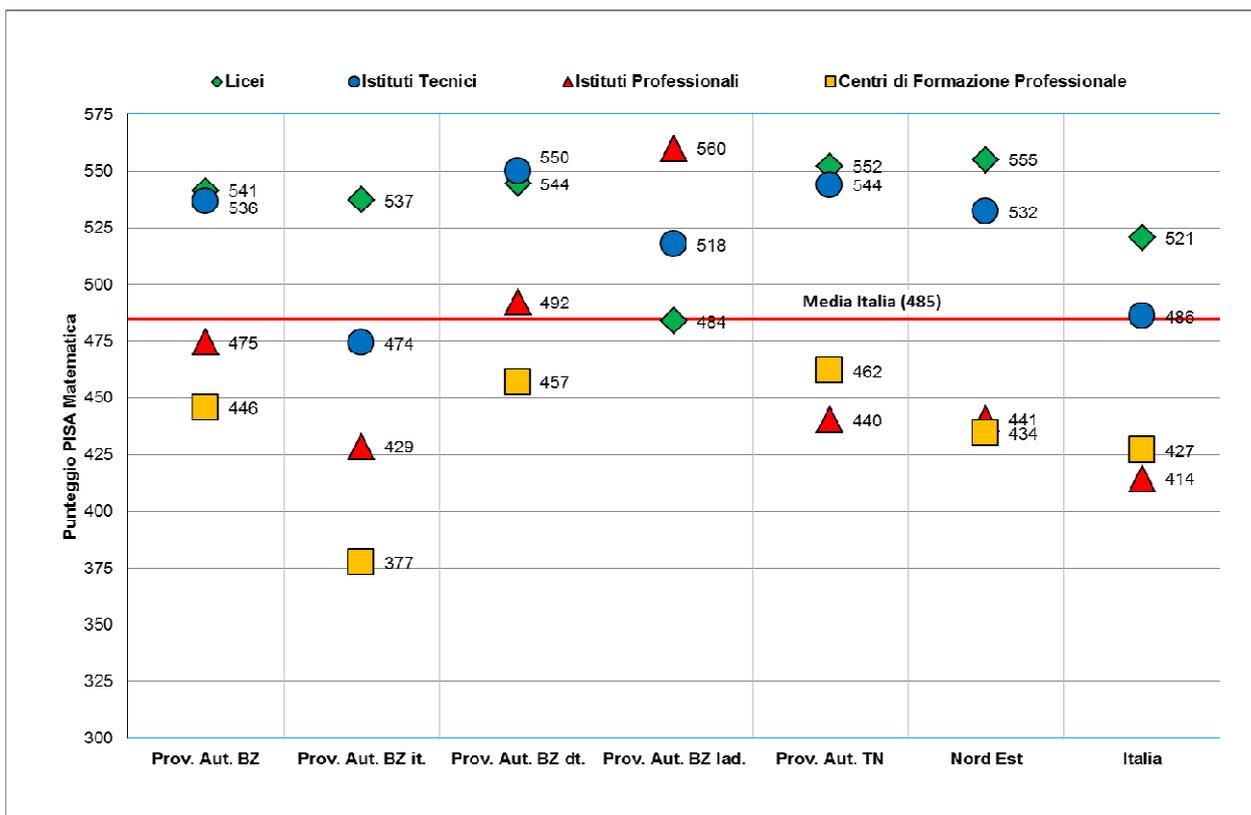
2.3. I risultati dell'Alto Adige/Südtirol per tipologia di studenti

Il disegno del campionamento dell'Italia permette di disaggregare i punteggi per tipo di scuola, per genere e origine e ottenere stime dei risultati per le diverse tipologie di studenti. Nei paragrafi successivi si confronteranno risultati di questi studenti suddivisi per gruppi linguistici.

2.3.1. Distribuzione dei risultati in base alla tipologia di scuola

Nella figura 2.6 sono riportati i punteggi ottenuti dagli studenti per tipologia di scuola e per gruppi linguistici. Va ricordato che i dati devono essere letti con cautela per evitare di interpretare i punteggi più o meno elevati ottenuti dagli studenti dei diversi tipi di istruzione in termini di efficacia di quella tipologia di scuola. Le differenze tra le tipologie di scuola sono, in gran parte, il risultato della scelta di studenti con diversi livelli di abilità in percorsi diversi che avviene all'uscita del primo ciclo di istruzione. La linea rossa orizzontale rappresenta la media italiana (485). Il confronto è fatto anche rispetto alla provincia di Trento, al Nord-Est e all'Italia. Per comprendere al meglio questi risultati nella tabella 2.4 sono riportati anche gli errori standard, che ci dicono se le differenze fra le diverse tipologie di scuola sono statisticamente significative. Come si può vedere, in analogia a quello che succede nel resto del paese, i Licei ottengono, all'interno di ciascuna area, oltre che a livello nazionale, risultati mediamente più alti dei Tecnici e questi a loro volta hanno risultati superiori agli Istituti Professionali.

Abb./fig.: 1.6 - Distribuzione dei punteggi per tipologia di scuola nella Prov. Aut. di Bolzano



Tab./tav.: 1.4 - Punteggi in Matematica ed Errore Standard (E.S.)

	Prov. Aut. BZ	E.S.	Prov. Aut. BZ it.	E.S.	Prov. Aut. BZ dt.	E.S.	Prov. Aut. BZ lad.	E.S.	Prov. Aut. TN	E.S.	Nord Est	E.S.	Italia	E.S.
Licei	541	(3,19)	537	(4,25)	544	(4,25)	484	(22,13)	552	(6,35)	555	(7,68)	521	(3,37)
Istituti Tecnici	536	(3,03)	474	(5,91)	550	(3,26)	518	(9,90)	544	(4,21)	532	(5,67)	486	(2,42)
Istituti Professionali	475	(4,54)	429	(6,81)	492	(6,32)	560	(14,81)	440	(4,93)	441	(6,28)	414	(3,29)
Centri di Formazione Professionale	446	(3,88)	377	(6,89)	457	(4,20)			462	(11,06)	434	(5,80)	427	(7,20)

Il dato che colpisce e che deve essere interpretato con cautela, è che nella scuola di lingua ladina sembrerebbe esserci una inversione di tendenza rispetto agli altri gruppi linguistici, in realtà considerato che l'errore standard è molto elevato data l'esiguità del campione, non c'è una differenza statisticamente significativa per questi studenti rispetto alla tipologia di scuola e si può osservare che gli studenti di lingua ladina hanno buoni risultati, in generale al di sopra della media OCSE. Se invece confrontiamo i due gruppi linguistici più numerosi (dt. e it.) possiamo osservare che non c'è una sostanziale differenza fra gli studenti che frequentano i Licei, mentre le differenze sono significative rispetto alle altre tipologie di scuola. I ragazzi di lingua tedesca che frequentano l'Istruzione Tecnica hanno risultati che non si discostano dai risultati dei ragazzi che frequentano i Licei, mentre la differenza fra le due tipologie di scuola è maggiore per i ragazzi di lingua italiana. I ragazzi di lingua tedesca che frequentano l'Istruzione Professionale hanno risultati che non si discostano dalla media OCSE e sono migliori dei risultati della provincia di Trento, della macro-area del Nord Est e dell'Italia. Un altro elemento di attenzione è che mentre nel Nord-Est e in Italia i risultati dell'Istruzione Professionale e della

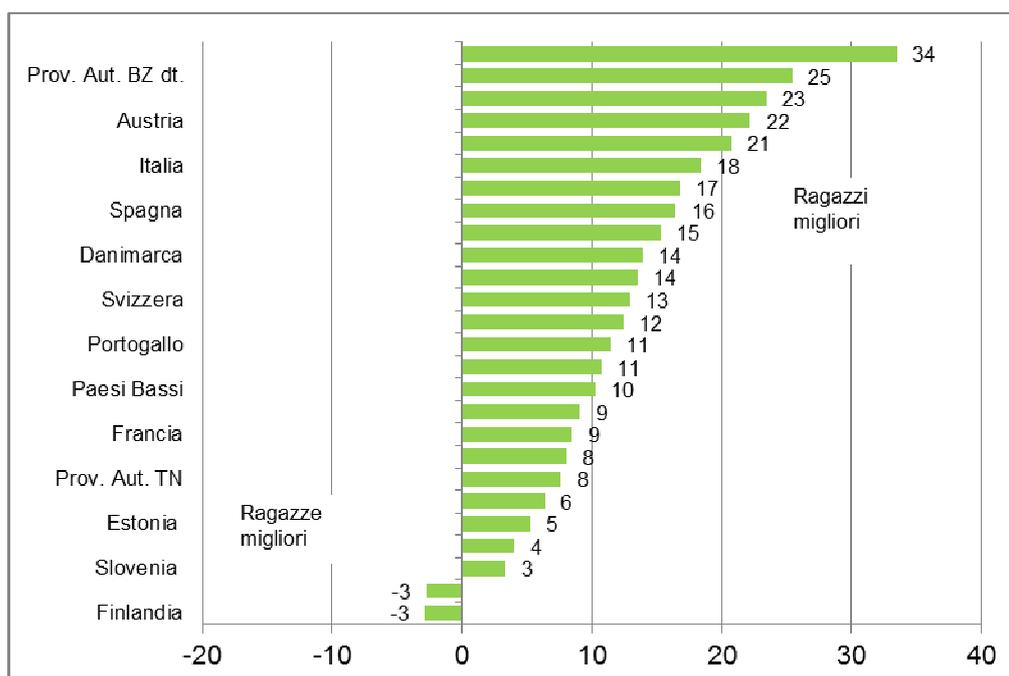
Formazione Professionale non si differenziano fra loro in modo significativo, nel gruppo linguistico italiano della Provincia di Bolzano questa differenza è significativa. Nella provincia di Trento si può notare un dato in contro tendenza: i risultati dei ragazzi che frequentano la Formazione Professionale sono migliori rispetto agli studenti che frequentano l'Istruzione Professionale.

2.3.2. Distribuzione dei risultati in base al genere

I dati del PISA 2012 confermano la tendenza, già evidenziata nelle edizioni passate del Pisa, secondo la quale i maschi hanno risultati migliori in Matematica rispetto alle femmine (figura 2.7, tabella 2.5). C'è una differenza statisticamente significativa a vantaggio dei maschi nella competenza matematica nella maggior parte dei paesi: in media, nei paesi dell'OCSE, i maschi superano le femmine di 11 punti e tale differenza è rimasta pressoché stabile nelle rilevazioni dal 2003 al 2012. Il punteggio riportato dai maschi sulla scala complessiva di competenza matematica è di 499 punti, mentre quello delle femmine è di 488 punti. In Italia il punteggio dei maschi è di 484 punti mentre quello delle femmine è di 476 punti, quindi la differenza è di 18 punti a favore dei maschi, superiore alla media OCSE, ma inferiore ad esempio a quella dell'Austria che è di 22 punti a favore dei maschi. Solo in due paesi dell'area OCSE (Svezia e Finlandia) la differenza fra maschi e femmine è a favore delle ragazze.

Nella provincia autonoma di Bolzano la differenza fra maschi e femmine è di 23 punti a favore dei maschi con un E.S. di 3,9. Se osserviamo queste differenze all'interno dei tre gruppi linguistici possiamo vedere che il dato degli studenti ladini è molto elevato (35 punti a favore dei maschi), ma risente dell'alta variabilità (E.S. 15,8) dovuta al campione esiguo. Per il gruppo linguistico tedesco la differenza è di 25 punti a favore dei maschi (E.S. 4,8), mentre nel caso degli studenti di lingua italiana la differenza è di 17 punti (E.S. 6,3) in linea con il dato italiano e della macro area del Nord-Est. Interessante il dato della provincia di Trento che si colloca ben al di sotto della media OCSE con soli 8 punti di vantaggio per i maschi, anche se l'E.S. è elevato (9,1).

Abb./fig.: 1.7 - Differenze di genere sulla scala di competenza matematica



Tab./tav.: 1.5 - Differenze di genere ed errore standard (E.S.) sulla scala di competenza matematica

Paesi	Differenze Maschi-Femmine	E.S.
Finlandia	-3	(2,9)
Svezia	-3	(3,0)
Slovenia	3	(3,1)
Polonia	4	(3,4)
Estonia	5	(2,6)
Belgio	6	(3,4)
Prov. Aut. TN	8	(9,1)
Grecia	8	(3,2)
Francia	9	(3,4)
Ungheria	9	(3,7)
Paesi Bassi	10	(2,8)
Media OCSE	11	(0,6)
Portogallo	11	(2,5)
Regno Unito	12	(4,7)
Svizzera	13	(2,7)
Germania	14	(2,8)
Danimarca	14	(2,3)
Irlanda	15	(3,8)
Spagna	16	(2,2)
Prov. Aut. BZ it.	17	(6,3)
Italia	18	(2,5)
Nord Est	21	(5,6)
Austria	22	(4,9)
Prov Aut. BZ	23	(3,9)
Prov. Aut. BZ dt.	25	(4,8)
Prov. Aut. BZ lad.	34	(15,8)

2.4. I livelli di competenza matematica

2.4.1. Descrizione dei livelli di competenza

I risultati dell'indagine PISA per la Matematica sono presentati in diversi modi. La stima del livello globale di competenza matematica si ottiene a partire da campioni di studenti di ciascun paese da cui si ricava una serie di livelli di competenza. Viene inoltre descritto il livello medio di *literacy* matematica per i diversi livelli individuati. Oltre a ciò si identificano aspetti della competenza matematica pertinenti alle politiche educative dei paesi partecipanti, se ne deducono stime separate, e il grado di competenza degli studenti è descritto anche in base a queste scale. Gli aspetti potenzialmente utili ai fini della presentazione possono essere definiti in vari modi. La tabella 2.6 riporta i sei gradi o livelli di competenza utilizzati per la scala di rilevazione della *literacy* matematica nei cicli PISA 2003, 2006 e 2009, e che costituiscono la base della scala di competenza matematica del ciclo 2012.

L'indagine PISA 2012 per la Matematica contempla gradi di difficoltà assai diversi fra loro, rispecchiando la gamma delle capacità che studenti di 15 anni possono avere. Si va da quesiti che possono essere difficili anche per gli studenti più abili a quesiti adatti agli studenti considerati meno abili in Matematica. Da un punto di vista psicometrico, un'indagine pensata per valutare un specifico gruppo di individui è più efficace ed efficiente se la difficoltà dei quesiti corrisponde alle capacità dei soggetti valutati. Per di più, le scale di competenza così importanti nella presentazione dei risultati PISA possono includere dettagli utili per gli studenti se gli *item* a partire dai quali si desume la competenza coprono tutto lo spettro di competenza descritto. Le scale di competenza sono basate su livelli crescenti di attivazione delle capacità matematiche fondamentali, descritte in dettaglio nella tabella 2.6. Dai precedenti cicli PISA è emerso che nel loro complesso queste capacità sono indicatori del carico cognitivo e in quanto tali contribuiscono in gran misura alla difficoltà delle prove. In base alla descrizione dell'attivazione di queste capacità, dopo la prova su campo per il ciclo 2012 è stata messa a punto la scala di competenza PISA 2012. Questa scala consente una misurazione empirica del carico cognitivo richiesto da ciascun *item*.

Tab./tav.: 1.6 - I livelli di competenza nella *literacy* matematica

Livello	Limite inferiore	Percentuale di studenti che raggiungono questo livello (media OCSE, Italia e Prov. Aut. BZ)	Descrittori di ciascun livello
6	669	OCSE 3,3 Italia 2,2 Prov. Aut.BZ 3,2	Al livello 6 gli studenti sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni sulla base della modellizzazione di situazioni problematiche complesse. Sanno mettere in relazione diverse fonti di informazione e rappresentazioni muovendosi al loro interno senza difficoltà. Possono fare riflessioni e ragionamenti matematici difficili. Sanno applicare la loro comprensione e intuizione con una padronanza delle operazioni e relazioni matematiche simboliche e formali che permette loro di elaborare approcci e strategie di attacco in presenza di situazioni mai incontrate prima. A questo livello, gli studenti sono in grado di formulare e comunicare con precisione le loro azioni e riflessioni in relazione ai loro risultati, interpretazioni, argomentazioni e alla loro pertinenza rispetto alle situazioni iniziali.
5	607	OCSE 19,3 Italia 7,8 Prov. Aut.BZ 10,1	Al livello 5 gli studenti possono mettere a punto e utilizzare modelli per situazioni complesse, identificando i vincoli e specificando i presupposti. Sanno selezionare, raffrontare e valutare le strategie appropriate alla soluzione di problemi complessi in relazione a tali modelli. Sono in condizione di affrontare situazioni da un'angolazione strategica, ricorrendo a competenze ben sviluppate di ragionamento e riflessione, alle relative rappresentazioni, caratterizzazioni simboliche e formali con una comprensione approfondita di tali situazioni. Riflettono sulle loro azioni e sanno formulare e comunicare le loro interpretazioni e il percorso seguito nel ragionamento.
4	545	OCSE 18,2 Italia 16,7 Prov. Aut.BZ 20,3	Al livello 4 gli studenti sanno lavorare efficacemente con modelli espliciti di situazioni concrete complesse che possono comportare vincoli e richiedere deduzioni. Possono selezionare e integrare rappresentazioni di tipo diverso, anche simboliche, collegandole direttamente a situazioni del mondo reale. A questo livello gli studenti sono in grado di utilizzare competenze con un certo grado di profondità. Possono elaborare ed esprimere argomentazioni e spiegazioni delle loro interpretazioni e azioni.
3	482	OCSE 27,7 Italia 24,6 Prov. Aut.BZ 28,7	Al livello 3 gli studenti sono in grado di seguire procedure chiaramente descritte. Sanno selezionare e applicare semplici strategie per risolvere problemi. A questo livello possono interpretare e utilizzare rappresentazioni a partire da fonti di informazione diverse e costruire un ragionamento su questa base. Sono in grado di elaborare comunicazioni succinte per presentare i loro risultati, interpretazioni e ragionamenti.
2	420	OCSE 22,5 Italia 24,1 Prov. Aut.BZ 20,1	Al livello 2 gli studenti sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedono al massimo deduzioni dirette. Possono ricavare informazioni pertinenti da un'unica fonte e utilizzare una sola modalità di rappresentazione. Sono in grado di utilizzare algoritmi, formule, procedure o convenzioni elementari. Possono fare un ragionamento diretto e fornire un'interpretazione letterale dei loro risultati.
1	358	OCSE 15,0 Italia 16,1 Prov. Aut.BZ 12,6	Al livello 1 gli studenti sanno rispondere a domande inserite in un contesto familiare dove tutte le informazioni sono esplicite e ciò che si chiede loro è chiaramente definito. Sono in grado di identificare informazioni ed eseguire procedure di routine seguendo istruzioni dirette in situazioni esplicite. Possono eseguire azioni ovvie derivanti direttamente dallo stimolo somministrato.

Il quesito scelto come esempio per descrivere i livelli di competenza della scala generale di Matematica si colloca nella categoria di contesto *Personale* perché tratta di un viaggio in bicicletta; inoltre il fatto che vengano messe in relazione variabili come tempo, distanza e velocità colloca l'unità nell'ambito *Cambiamento e relazioni*. Infine il processo coinvolto è in tutte e tre le domande *Utilizzare* a livelli di competenza diversi: dal livello 2 al livello 6.

Elena la ciclista



Elena ha ricevuto una nuova bicicletta. Sul manubrio c'è un tachimetro.

Il tachimetro indica a Elena la distanza percorsa e la velocità media per il tragitto fatto.

Domanda 1: ELENA LA CICLISTA

Durante un giro in bicicletta, Elena ha percorso 4 km nei primi 10 minuti, poi 2 km nei 5 minuti successivi.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A. La velocità media di Elena nei primi 10 minuti è superiore rispetto ai 5 minuti seguenti.
- B. La velocità media di Elena nei primi 10 minuti è la stessa che nei 5 minuti seguenti.
- C. La velocità media di Elena nei primi 10 minuti è inferiore rispetto ai 5 minuti seguenti.
- D. Non è possibile trarre conclusioni sulla velocità media di Elena a partire dalle informazioni fornite.

Informazioni quesito D1

Scopo della domanda

Calcolare la velocità media per l'intero del tragitto a partire dalle velocità medie e dalle durate dei percorsi delle due parti del tragitto

Contesto

Personale

Ambito

Cambiamento e relazioni

Processo

Utilizzare

Formato

Scelta multipla

Livello di competenza

Difficoltà 440,5; livello 2

Indicazioni per la correzione

Risposta corretta B

Commento

La domanda richiede di confrontare la velocità media quando si percorrono 4 km in 10 minuti, rispetto a 2 km in 5 minuti. È stata classificata nel processo *Utilizzare* in quanto richiede di conoscere e comprendere che la velocità è un rapporto, quindi la proporzionalità è la chiave di soluzione. La domanda può essere risolta riconoscendo la relazione di doppio fra le variabili (2-4 km e 5-10 minuti) che è la relazione di proporzionalità più semplice. Gli studenti che la risolvono correttamente dimostrano una competenza di base nella comprensione del significato di velocità: se la distanza e il tempo sono nella stessa proporzione, allora la velocità è la stessa. Naturalmente gli studenti potrebbero risolverla anche utilizzando strategie più complicate ad esempio calcolando che la velocità è la stessa cioè 24 km/h, ma questo non è necessario per rispondere correttamente alla domanda.

Domanda 2: ELENA LA CICLISTA

Elena ha percorso 6 km per andare alla casa della zia. Il suo tachimetro mostra che ha tenuto una media di 18 km/h per l'intero percorso.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A. Elena ha impiegato 20 minuti per andare a casa della zia.
- B. Elena ha impiegato 30 minuti per andare a casa della zia.
- C. Elena ha impiegato 3 ore per andare a casa della zia.
- D. Non è possibile dire quanto tempo ha impiegato Elena per andare a casa della zia.

Informazioni quesito D2

Scopo della domanda	Calcolare la durata del percorso data la velocità media e la distanza percorsa
Contesto	Personale
Ambito	Cambiamento e relazioni
Processo	Utilizzare
Formato	Scelta multipla
Livello di competenza	Difficoltà 510,6; livello 3
Indicazioni per la correzione	Risposta corretta A

Commento

La domanda si colloca a livello 3 e può essere risolta con un semplice ragionamento proporzionale: se la velocità media è di 18 km/h e 6 chilometri sono un terzo della distanza allora sono necessari 20 minuti, un terzo di un'ora, per coprire il tragitto.

Domanda 3: ELENA LA CICLISTA

Elena è andata in bicicletta da casa sua fino al fiume, che dista 4 km. Ha impiegato 9 minuti. È rientrata a casa passando per una scorciatoia di 3 km. Ha impiegato solo 6 minuti.

Qual è stata la velocità media di Elena (in km/h) durante il tragitto di andata e ritorno al fiume?

Velocità media del tragitto: km/h

Informazioni quesito D3

Scopo della domanda	Calcolare una velocità media di due tragitti partendo da due distanze percorse e dalla durata dei percorsi
Contesto	Personale
Ambito	Cambiamento e relazioni
Processo	Utilizzare
Formato	Aperta univoca
Livello di competenza	Difficoltà 696,6; livello 6
Indicazioni per la correzione	Risposta corretta: 28

Commento

La domanda richiede una comprensione profonda del significato di velocità media. La velocità media non può essere ottenuta calcolando la media delle velocità, anche se in questo specifico caso il risultato errato (28,3 km/h) che si ottiene attraverso la media delle due velocità (26,67 km/h e 30 km/h) non è molto diverso dalla risposta

corretta. Gli studenti che calcolano il rapporto fra la distanza totale e il tempo totale impiegato per percorrere tale distanza (9+6=15 minuti e 4+3=7 km) possono ottenere la risposta attraverso un semplice ragionamento proporzionale: 7 km in un quarto d'ora, quindi 28 km in un'ora. Una strategia più complessa è quella di utilizzare la formula velocità = distanza/tempo, che richiede la conversione dell'unità di tempo:

$$\frac{7}{\left(\frac{15}{60}\right)} = \frac{420}{15} = 28.$$

È una delle domande più difficili dei fascicoli.

Commento generale sull'unità

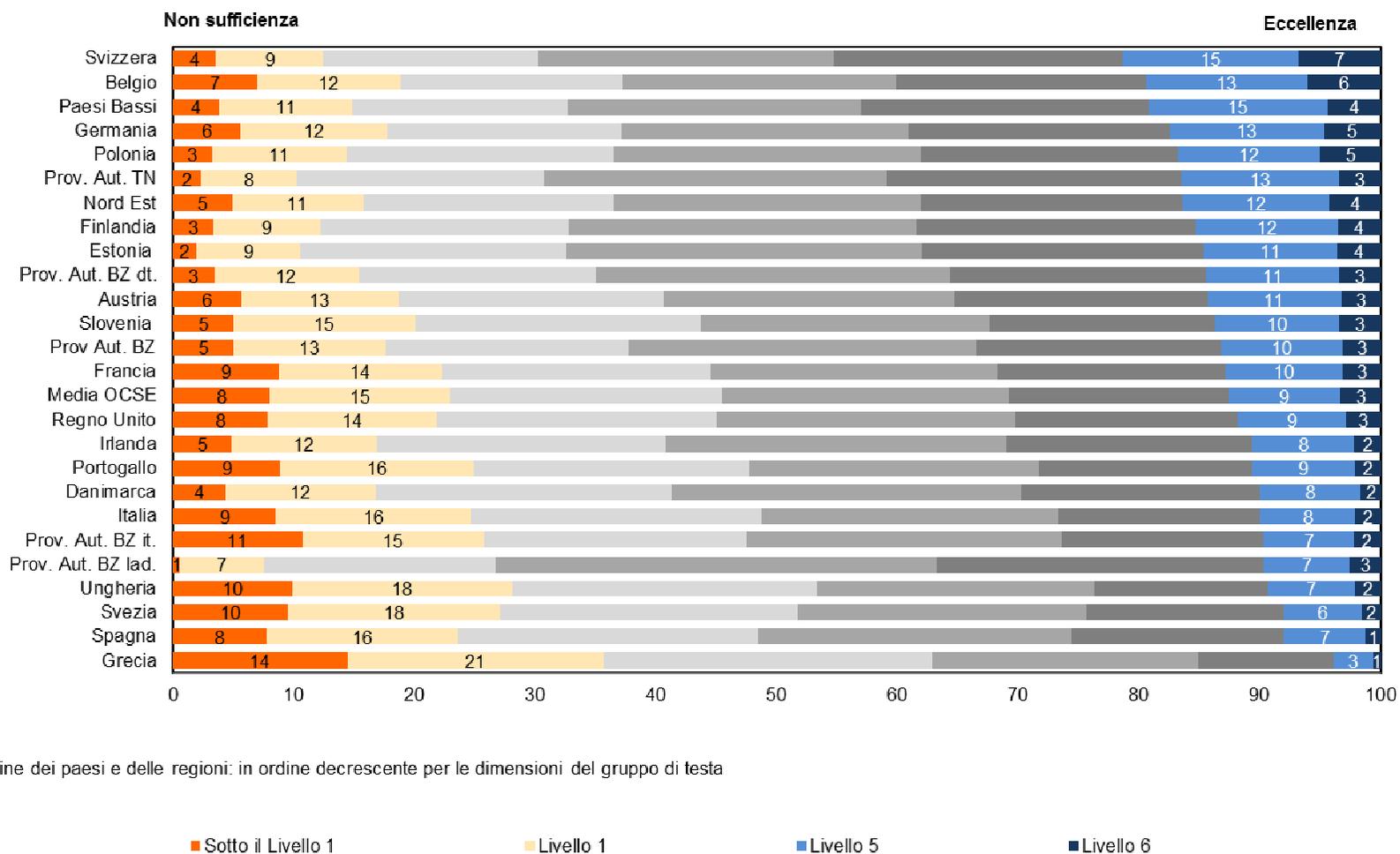
Analizzando l'unità nel suo insieme si può osservare un graduale aumento della difficoltà, che può essere analizzata rispetto alle strategie complessive di risoluzione: nella Domanda 1 devono essere confrontati due rapporti, nella Domanda 2 la strategia si muove dalla velocità e distanza al tempo con una conversione di unità, mentre nella Domanda 3 quattro quantità devono essere combinate in un modo che spesso gli studenti trovano contro-intuitivo. Invece di combinare le informazioni sulla distanza e il tempo per ognuno dei viaggi, le due distanze e i due tempi devono essere combinate trovando una nuova distanza e un nuovo tempo, da cui la velocità media. Nella soluzione più elegante gli aspetti aritmetici sono semplici, i metodi adottati dagli studenti implicano spesso calcoli più complessi.

2.4.2.1 risultati in Alto Adige/Südtirol rispetto alla scala di competenza

I risultati circa il grado di competenza matematica degli studenti si possono anche analizzare in relazione alla distribuzione percentuale degli studenti sulla scala complessiva di Matematica per i diversi livelli di competenza. Il grafico 2.8 mostra questo tipo di distribuzione. In particolare è utile vedere come si distribuiscono gli studenti rispetto agli estremi della scala. Gli studenti che rientrano nell'area definita della "non sufficienza" si collocano al livello 1 o sotto 1 ed ottengono un punteggio inferiore a 357,77 punti. Questo gruppo di studenti non è in grado di svolgere le più elementari operazioni matematiche o di utilizzare le abilità matematiche in situazioni determinate, come richiesto dai più semplici quesiti PISA⁶. Gli studenti con i livelli più elevati di competenza sono quelli di livello 5 e 6 (area eccellenza) e sono capaci di utilizzare le competenze matematiche in situazioni complesse. La media dell'OCSE per gli studenti del primo gruppo è pari al 23%, mentre per il gruppo degli studenti dell'area di eccellenza è pari al 12%. Tra i paesi europei il fanalino di coda è la Grecia che ha una percentuale di studenti nei livelli 1 o inferiore all'1 pari al 35% e una percentuale di studenti nei livelli 5 e 6 del 4%. In Italia la percentuale degli studenti sotto il livello 2 è del 25% ed è del 10% la percentuale di studenti ai livelli più alti, percentuale al di sotto della media OCSE. Se consideriamo la Provincia Autonoma di Bolzano nel suo complesso, la percentuale è rispettivamente del 18% per il gruppo della non sufficienza e del 13% per il gruppo dell'eccellenza. Questi risultati sono un po' meno soddisfacenti rispetto alla macro-area di appartenenza, il Nord-Est, che ha il 16% di studenti nei livelli bassi e il 16% di studenti nei livelli alti.

⁶ La Domanda 1 del quesito *Elena la ciclista*, corrisponde a un livello 2 (punteggio 440,5)

Abb./fig.: 1.8 - Distribuzione degli studenti nei livelli di competenza della scala di Matematica



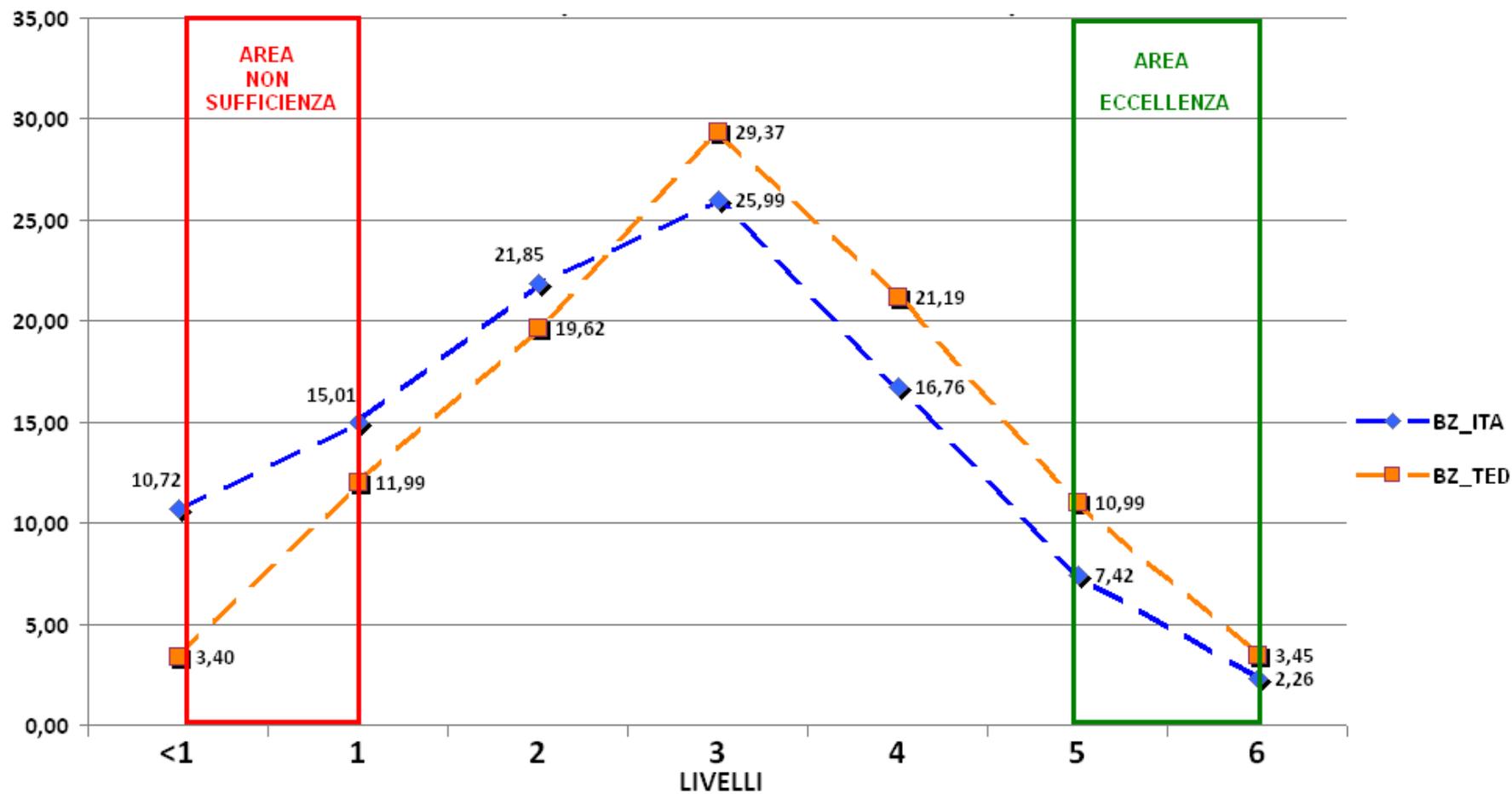
Nella tabella 2.7 sono riportate le distribuzioni percentuali degli studenti che si collocano ai due estremi della scala di competenza globale (livello 1 e inferiore a 1 e livelli 5 e 6) che riassume numericamente quanto esposto in precedenza.

Tab./tav.: 1.7 - Distribuzione percentuale degli studenti nei livelli estremi (liv 1 o minore e livelli 5 e 6)

Paesi	Percentuale di studenti livello 1 o < 1 Area non sufficienza	Percentuale di studenti livello 5 e 6 Area eccellenza
Grecia	35,7	3,9
Spagna	23,6	8,0
Svezia	27,1	8,0
Ungheria	28,1	9,3
Prov. Aut. BZ lad.	7,5	9,6
Prov. Aut. BZ it.	25,7	9,7
Italia	24,7	9,9
Danimarca	16,8	10,0
Portogallo	24,9	10,6
Irlanda	16,9	10,7
Regno Unito	21,8	11,8
Media OCSE	23,0	12,6
Francia	22,4	12,9
Prov Aut. BZ	17,6	13,3
Slovenia	20,1	13,7
Austria	18,7	14,3
Prov. Aut. BZ dt.	15,4	14,4
Estonia	10,5	14,6
Finlandia	12,3	15,3
Nord Est	15,7	16,5
Prov. Aut. TN	10,3	16,5
Polonia	14,4	16,7
Germania	17,7	17,5
Paesi Bassi	14,8	19,3
Belgio	18,9	19,4
Svizzera	12,4	21,4

Un dato interessante è il confronto fra i due principali gruppi linguistici, italiano e tedesco, rappresentato in sintesi nella figura 2.9. Come si vede la curva che rappresenta la distribuzione nei livelli degli studenti di lingua tedesca si colloca fino al livello 2 sotto la curva che rappresenta la distribuzione nei livelli degli studenti di lingua italiana, ciò significa che nei livelli più bassi la percentuale di studenti di lingua italiana è maggiore rispetto a quella di studenti di lingua tedesca. Sull'altro versante del grafico è la linea della percentuale di studenti di lingua italiana che si colloca al di sotto della linea degli studenti di lingua tedesca, anche se le differenze sui livelli alti (livello 6, ad esempio) non sono così marcate e il dato percentuale dei due gruppi quasi coincide. Come già emerso dall'analisi dei risultati per tipologia di scuola l'area di criticità per la scuola di lingua italiana è rappresentata dagli studenti che si collocano sotto il livello 1; infatti la percentuale degli studenti italiani a questo livello è tripla rispetto a quella del gruppo linguistico tedesco. È quindi necessario capire a quale tipologia appartengono gli studenti che si collocano in questi due livelli in entrambi i gruppi linguistici.

Abb./fig.: 1.9 - Distribuzione dei livelli di competenza nei due principali gruppi linguistici della Prov. Aut. di Bolzano

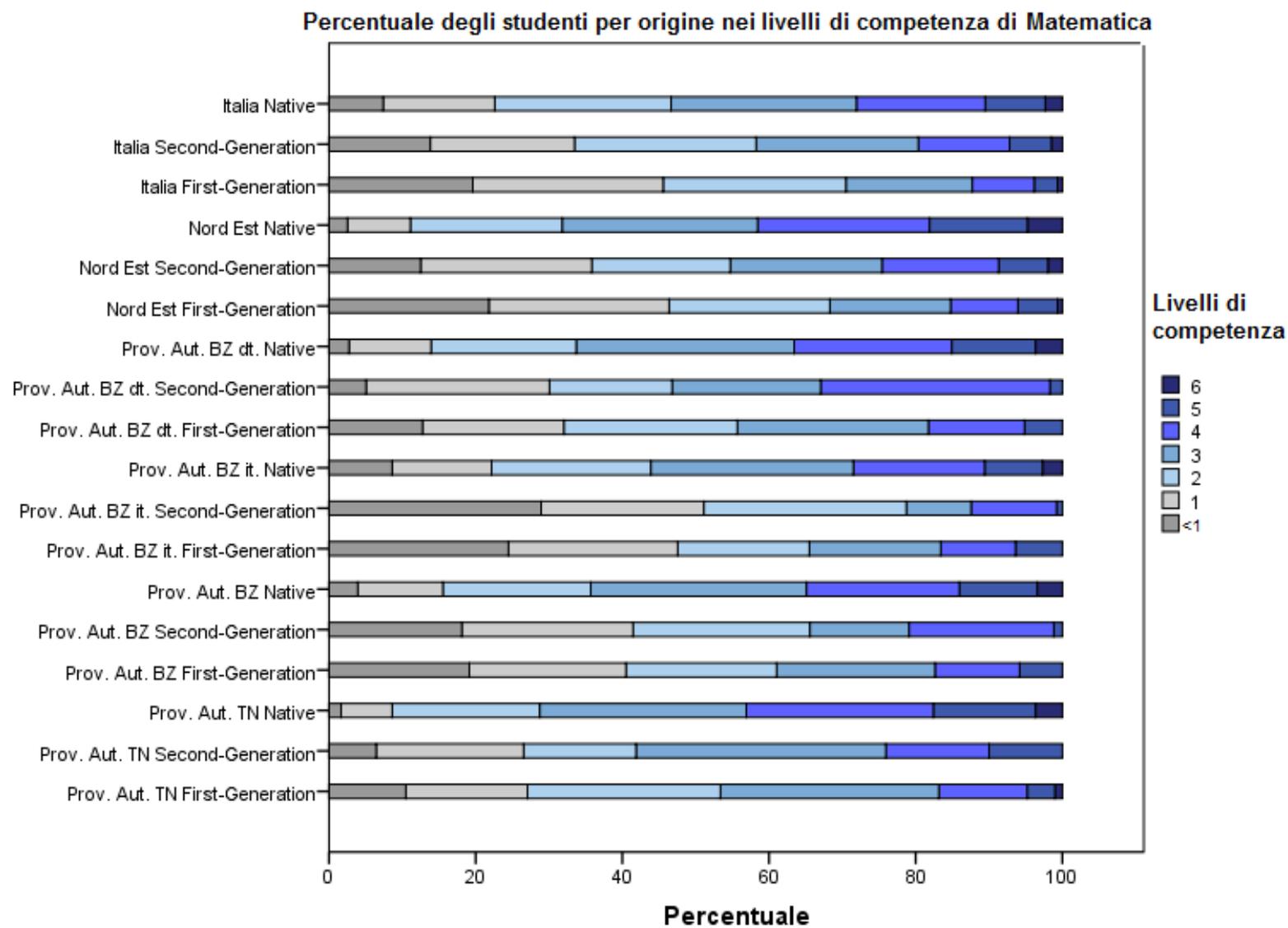


2.4.3.I risultati in base all'origine sui livelli della scala di competenza complessiva di matematica

Un'analisi più approfondita relativa alla composizione della popolazione studentesca potrebbe spiegare la differenza di distribuzione dei livelli di competenza fra i due principali gruppi linguistici nella provincia autonoma di Bolzano. In questo paragrafo si analizza la distribuzione nei livelli di competenza in relazione all'origine degli studenti (nativi, stranieri di I generazione e stranieri di II generazione)⁷. Il grafico 2.10 confronta la distribuzione degli studenti per livello di competenza nei due principali gruppi linguistici della Provincia di Bolzano, di Trento, del Nord-Est e dell'Italia. Si può osservare che tanto maggiore è l'ampiezza delle barre corrispondenti ai livelli 1 e < di 1, tanto maggiore è la percentuale degli studenti che si collocano in questi livelli, che abbiamo chiamato di "non sufficienza". Si può notare dal grafico, che la percentuale di studenti con background migratorio, sia di I, sia di II generazione - che si collocano nei livelli inferiori della scala - è intorno al 50% nelle scuole di lingua italiana, mentre nelle scuole di lingua tedesca questa percentuale è del 30%. Inoltre un dato di cui tener conto è la diversa composizione della popolazione nelle scuole dei due principali gruppi linguistici in relazione all'origine degli studenti: nelle scuole di lingua italiana la percentuale di alunni stranieri quindicenni (di I e II generazione) è pari al 13,5% a fronte di una percentuale del 3,5% nelle scuole di lingua tedesca (cfr. Cap.1).

⁷ Si considerano come "stranieri" (OECD, 2013) gli studenti nati all'estero da genitori stranieri (I generazione) e gli studenti nati in Italia da genitori entrambi stranieri (II generazione).

Abb./fig.: 1.10 - Distribuzione degli studenti in base all'origine sulla scala complessiva di Matematica



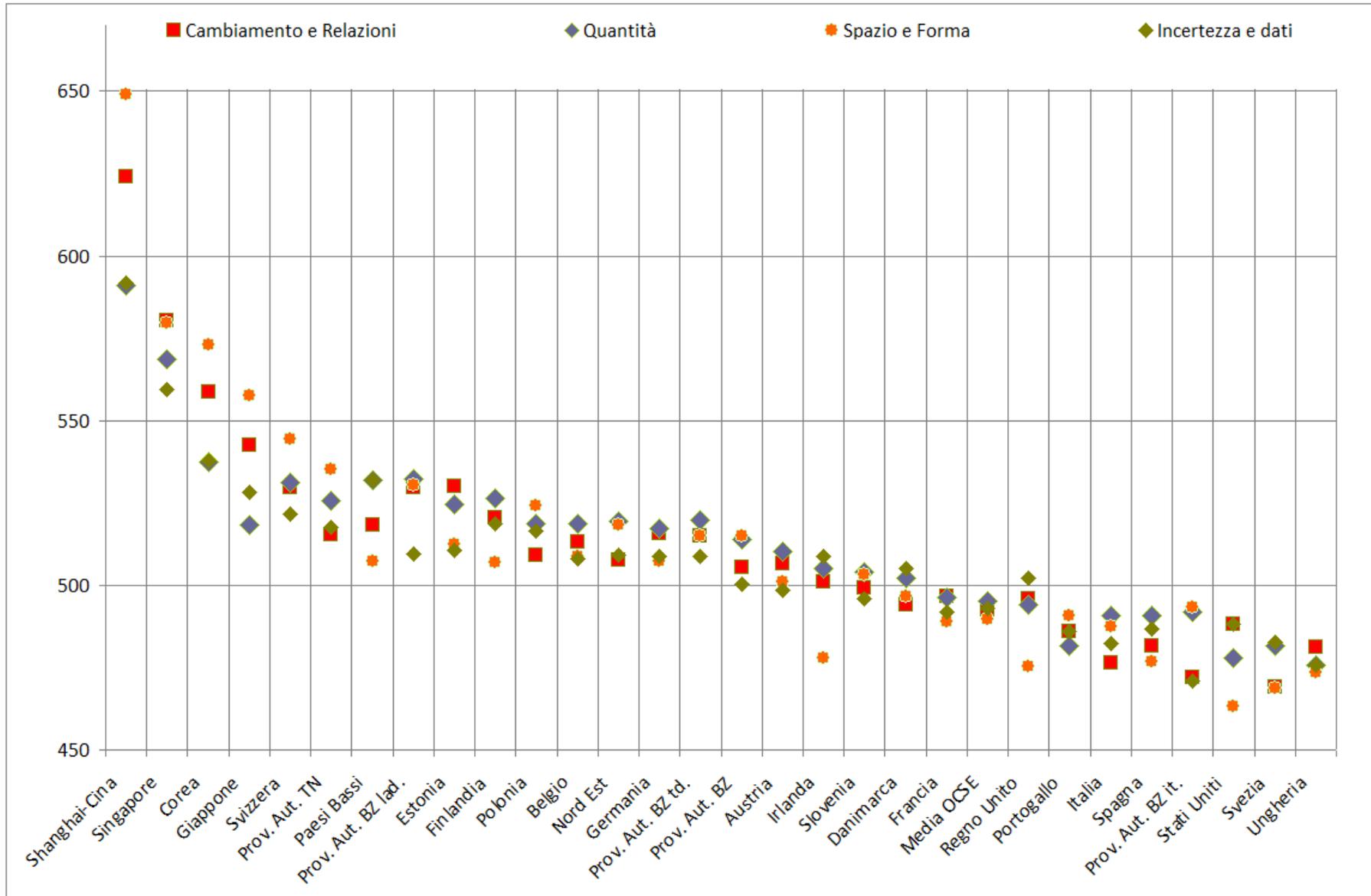
2.5. Le prestazioni degli studenti nelle scale relative ai singoli aspetti della *literacy* matematica

I dati della *literacy* matematica di PISA 2012 permettono di esaminare il livello di competenza dei quindicenni non solo sulla scala complessiva di competenza matematica, ma anche su scale più analitiche relative ai due aspetti esaminati nella *literacy* matematica: le categorie di contenuto e di processo. In questo modo è possibile rappresentare la situazione di un Paese attraverso un profilo che tenga conto delle possibili diverse scelte operate nei curricula sulle varie parti della Matematica. In generale la correlazione fra i punteggi è alta: gli studenti tendono ad ottenere gli stessi punteggi sulla scala di Matematica principale e sulle sotto-scale. Si possono osservare alcune variazioni, a livello nazionale, che riflettono probabilmente differenti accenti nei curricula scolastici (INVALSI, 2014).

2.5.1. Le prestazioni degli studenti nelle quattro aree di contenuto

Le quattro aree di contenuto del PISA 2012, *Quantità, Spazio e forma, Cambiamento e relazioni, Incertezza e dati*, consentono di coprire adeguatamente l'ambito della Matematica e garantiscono una ripartizione fra gli *item* in tutto l'ambito e sono incentrate su fenomeni matematici importanti.

Abb./fig.: 1.11 - Risultati sulla scala delle categorie di contenuto



Tab./tav.: 1.8 - Punteggi nelle scale di contenuto

Paese	Math	Cambiamento e Relazioni	E.S.	Quantità	E.S.	Spazio e Forma	E.S.	Incertezza e dati	E.S.
Shanghai-Cina	613	624	(3,6)	591	(3,2)	649	(3,6)	592	(3,0)
Singapore	573	580	(1,5)	569	(1,2)	580	(1,5)	559	(1,5)
Corea	554	559	(5,2)	537	(4,1)	573	(5,2)	538	(4,2)
Giappone	536	542	(4,0)	518	(3,6)	558	(3,7)	528	(3,5)
Svizzera	531	530	(3,4)	531	(3,1)	544	(3,1)	522	(3,2)
Prov. Aut. TN	524	515	(5,0)	526	(4,3)	535	(4,9)	518	(4,8)
Paesi Bassi	523	518	(3,9)	532	(3,6)	507	(3,5)	532	(3,8)
Prov. Aut. BZ lad.	523	530	(8,4)	532	(9,3)	531	(9,0)	510	(9,4)
Estonia	521	530	(2,3)	525	(2,2)	513	(2,5)	510	(2,0)
Finlandia	519	520	(2,6)	527	(1,9)	507	(2,1)	519	(2,4)
Polonia	518	509	(4,1)	519	(3,5)	524	(4,2)	517	(3,5)
Belgio	515	513	(2,6)	519	(2,0)	509	(2,4)	508	(2,5)
Nord Est	514	508	(4,3)	519	(4,5)	518	(4,6)	509	(3,8)
Germania	514	516	(3,8)	517	(3,1)	507	(3,2)	509	(3,0)
Prov. Aut. BZ td.	513	515	(2,7)	520	(2,8)	515	(3,2)	509	(2,8)
Prov. Aut. BZ	506	505	(2,3)	514	(2,3)	515	(3,2)	500	(2,2)
Austria	506	506	(3,4)	510	(2,9)	501	(3,1)	499	(2,7)
Irlanda	501	501	(2,6)	505	(2,6)	478	(2,6)	509	(2,5)
Slovenia	501	499	(1,1)	504	(1,2)	503	(1,4)	496	(1,2)
Danimarca	500	494	(2,7)	502	(2,4)	497	(2,5)	505	(2,4)
Francia	495	497	(2,7)	496	(2,6)	489	(2,7)	492	(2,7)
Media OCSE	494	493	(0,6)	495	(0,5)	490	(0,5)	493	(0,5)
Regno Unito	494	496	(3,4)	494	(3,8)	475	(3,5)	502	(3,0)
Portogallo	487	486	(4,1)	481	(4,0)	491	(4,2)	486	(3,8)
Italia	485	477	(2,1)	491	(2,0)	487	(2,5)	482	(2,0)
Spagna	484	482	(2,0)	491	(2,3)	477	(2,0)	487	(2,3)
Prov. Aut. BZ it.	483	472	(3,9)	492	(3,9)	493	(3,9)	471	(3,6)
Stati Uniti	481	488	(3,5)	478	(3,9)	463	(4,0)	488	(3,5)
Svezia	478	469	(2,8)	482	(2,5)	469	(2,5)	483	(2,5)
Ungheria	477	481	(3,5)	476	(3,4)	474	(3,4)	476	(3,3)
Grecia	453	446	(3,2)	455	(3,0)	436	(2,6)	460	(2,6)

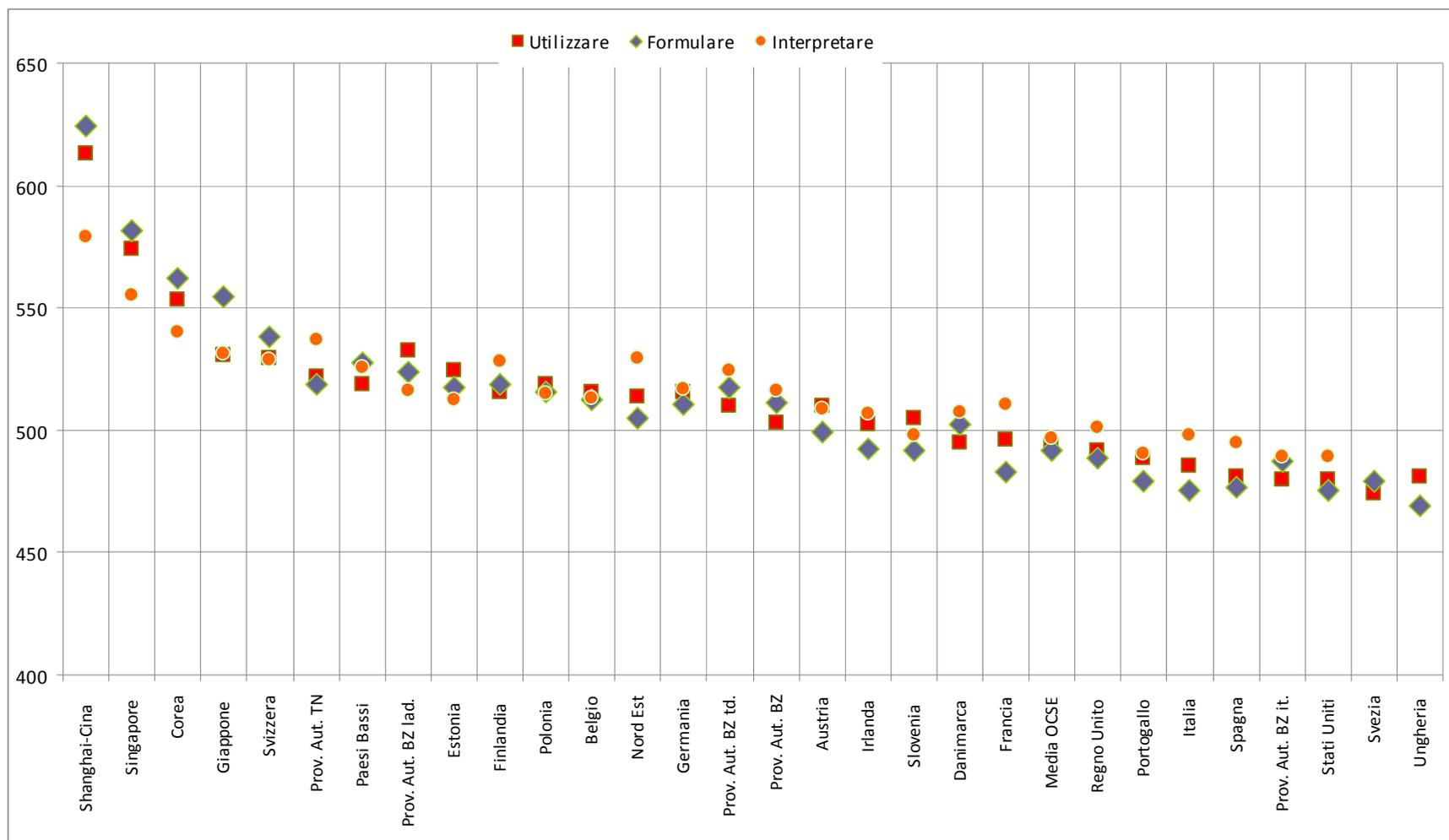
La Finlandia, uno dei paesi che si colloca ai livelli alti nella scala di competenza della matematica, sembra avere un'area di criticità nella categoria di contenuto *Spazio e forme*, mentre nelle altre tre categorie i punteggi non si discostano in modo significativo. Paesi vicini all'Italia come Germania e Austria presentano come punti deboli le categorie *Spazio e forma* e *Incertezza e dati*, sempre superiori alla media OCSE, ma all'interno delle quattro categorie i punteggi medi sono più bassi rispetto alle altre due categorie *Quantità* e *Cambiamento e relazioni*. L'Italia presenta come area di criticità la categoria di *Cambiamento e relazioni*, con uno scarto di 16 punti rispetto alla media OCSE. Questo dato fornisce alcune informazioni interessanti in quanto in generale il curriculum italiano nella classe frequentata dalla maggioranza dei quindicenni (II secondaria di II grado) è quasi completamente incentrato sull'Algebra e sul calcolo algebrico, che è proprio la parte

di curricolo afferente a questa categoria di contenuto. Nella Provincia Autonoma di Bolzano, in tutti e tre i gruppi linguistici, l'area di contenuto critica è rappresentata da *Incertezza e dati* e questo è comprensibile - anche se rappresenta un segnale di allarme - in quanto è abbastanza recente l'introduzione della Statistica e della Probabilità nelle indicazioni curriculari nazionali e provinciali e comunque probabilmente non ancora entrata nella prassi didattica. I ragazzi che frequentano le scuole di lingua italiana mostrano anche una difficoltà nell'area di contenuto *Cambiamento e relazioni*, in linea con il resto del Paese. In tutti e tre i gruppi linguistici, come del resto in Italia, le due aree di contenuto che hanno i punteggi più alti sono *Quantità* e *Spazio e forme*, coerentemente con l'attenzione che in tutto il primo ciclo di istruzione si dà a questi contenuti.

2.5.2. Le prestazioni degli studenti nelle tre categorie di processo

Secondo la definizione la *literacy matematica* è la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la Matematica in svariati contesti. Questi tre termini (*Formulare, Utilizzare, Interpretare*) costituiscono una struttura utile e significativa per l'organizzazione dei processi matematici che descrivono come gli studenti collegano il contesto di un problema alla Matematica. Le competenze inerenti queste tre categorie di processo rendono conto degli ostacoli che gli studenti incontrano nella risoluzione di problemi contestualizzati. Riuscire a comprenderne l'efficacia in ciascuno dei processi può essere utile per discutere delle politiche educative, dell'efficacia di certe scelte didattiche o anche di curricolo. Il grafico 2.12 rappresenta i risultati sulle scale di competenza delle tre categorie di processo e la tabella 2.9 i relativi punteggi e l'errore standard (E.S.).

Abb./fig.: 1.12 - Risultati sulla scala delle categorie di processo



Tab./tav.: 1.9 - Punteggi nelle scale di processo

Paese	Math	Utilizzare	E.S.	Formulare	E.S.	Interpretare	E.S.
Shanghai-Cina	613	613	(3,0)	624	(4,1)	579	(2,9)
Singapore	573	574	(1,2)	582	(1,6)	555	(1,4)
Corea	554	553	(4,3)	562	(5,1)	540	(4,2)
Giappone	536	530	(3,5)	554	(4,2)	531	(3,5)
Svizzera	531	529	(2,9)	538	(3,1)	529	(3,4)
Prov. Aut. TN	524	522	(4,6)	518	(3,9)	537	(4,2)
Paesi Bassi	523	518	(3,4)	527	(3,8)	526	(3,6)
Prov. Aut. BZ lad.	523	533	(8,4)	524	(8,3)	516	(11,0)
Estonia	521	524	(2,1)	517	(2,3)	513	(2,1)
Finlandia	519	516	(1,8)	519	(2,4)	528	(2,2)
Polonia	518	519	(3,5)	516	(4,2)	515	(3,5)
Belgio	515	516	(2,1)	512	(2,4)	513	(2,4)
Nord Est	514	514	(4,1)	505	(4,4)	529	(4,1)
Germania	514	516	(2,8)	511	(3,4)	517	(3,2)
Prov. Aut. BZ td.	513	510	(2,8)	518	(2,7)	524	(3,1)
Prov. Aut. BZ	506	503	(2,2)	511	(2,2)	516	(2,5)
Austria	506	510	(2,5)	499	(3,2)	509	(3,3)
Irlanda	501	502	(2,4)	492	(2,4)	507	(2,5)
Slovenia	501	505	(1,2)	492	(1,5)	498	(1,4)
Danimarca	500	495	(2,4)	502	(2,4)	508	(2,5)
Francia	495	496	(2,3)	483	(2,8)	511	(2,5)
Media OCSE	494	493	(0,5)	492	(0,5)	497	(0,5)
Regno Unito	494	492	(3,1)	489	(3,7)	501	(3,5)
Portogallo	487	489	(3,7)	479	(4,3)	490	(4,0)
Italia	485	485	(2,1)	475	(2,2)	498	(2,1)
Spagna	484	481	(2,0)	477	(2,2)	495	(2,2)
Prov. Aut. BZ it.	483	480	(3,2)	488	(3,4)	489	(3,6)
Stati Uniti	481	480	(3,5)	475	(4,1)	489	(3,9)
Svezia	478	474	(2,5)	479	(2,7)	485	(2,4)
Ungheria	477	481	(3,2)	469	(3,6)	477	(3,1)
Grecia ⁸	453	449	(2,7)	448	(2,3)	467	(3,1)

La cosa che colpisce rispetto ai risultati sulla scala dei processi è il fatto che alcuni fra i paesi asiatici presi in esame (Shangai, Singapore, Corea e Giappone) hanno risultati positivi nel processo *Formulare*, mentre sono meno buoni, pur rimanendo molto al di sopra della media OCSE, nel processo *Interpretare*. La sequenza è

⁸ I punteggi ottenuti dalla Grecia nelle sotto-scale di contenuto sono esterni all'area del grafico

invertita in Italia e nella maggioranza dei paesi europei. Infatti in Italia, come del resto nel Nord Est, la categoria di processo che ottiene punteggi medi più alti è l'*Interpretare*, quindi riuscire a valutare e interpretare un risultato matematico alla luce del contesto reale del problema sembrerebbe non essere il processo più difficile per gli studenti italiani. Lo stesso dato lo si osserva in tutti e tre i gruppi linguistici della Provincia Autonoma di Bolzano. Un altro elemento interessante di confronto è dato dal fatto che in Italia e in diversi paesi europei la categoria di contenuto che sembra mostrare criticità è quella del *Formulare*, cioè la capacità di passare dal problema reale alla sua rappresentazione matematica, saper individuare gli strumenti matematici e le strutture matematiche per risolvere il problema dato. In questo senso nella Provincia Autonoma di Bolzano, in entrambi i due gruppi linguistici principali, questa categoria di processo ottiene un punteggio leggermente superiore al processo *Utilizzare* e per entrambi i gruppi linguistici al di sopra della media italiana.

2.6. Aspetti motivazionali nell'apprendimento della Matematica

Questo paragrafo esplora alcuni indicatori relativi alla motivazione degli studenti nell'apprendimento della Matematica: la determinazione, la motivazione a risolvere problemi complessi; la motivazione intrinseca o strumentale all'apprendimento della Matematica; la percezione di sé rispetto alla Matematica e l'ansia rispetto alle prestazioni in Matematica. La rilevazione di questi indici avviene attraverso il questionario studenti che pone domande relative agli atteggiamenti degli studenti nei confronti della Matematica.

Indice di perseveranza e di motivazione alla risoluzione di problemi

Gli studenti che pensano di poter trattare molte informazioni, di comprendere rapidamente le situazioni, di essere capaci di collegare facilmente i fatti, cercano spiegazioni e amano risolvere problemi complessi, ottengono in media 31 punti in più in Matematica rispetto a quelli che sono meno ben disposti nei confronti dei problemi da risolvere. Le possibili risposte sono cinque: "mi descrive molto bene, mi descrive bene, mi descrive abbastanza bene, mi descrive poco, non mi descrive affatto". Nella tabella 2.10 è riportata, per ogni domanda considerata, la somma delle percentuali di risposta ai primi due descrittori ("mi descrive molto bene", "mi descrive bene").

Tab./tav.: 1.10 - Distribuzione percentuale indice di perseveranza e di apertura al *Problem solving*

DOMANDE	OCSE	ITALIA	NORD EST	Prov. Aut.TN	BZ it.	BZ lad .	BZ dt.
Indice di perseveranza							
Di fronte a un problema mi scoraggio facilmente.	17	24	23	21	28	15	14
Accantonano i problemi difficili.	30	23	25	20	25	17	27
Una volta incominciato un compito lo porto avanti con interesse	48	48	44	45	45	51	50
Continuo a lavorare su un compito finché non è perfetto.	43	34	30	31	33	44	38
Di fronte a un problema mi impegno più di quanto gli altri si aspettano da me.	34	43	37	37	40	20	17

Indice di apertura al <i>Problem solving</i>							
Riesco a gestire una gran quantità di informazioni.	52	51	45	45	51	58	56
Capisco le cose velocemente.	56	54	50	51	56	52	59
Cerco una spiegazione alle cose.	60	60	57	57	63	52	56
Riesco facilmente a collegare dei fatti tra di loro.	56	59	55	55	60	44	53
Mi piace risolvere problemi complessi.	32	26	24	22	28	27	26

Indice di motivazione intrinseca e strumentale

PISA distingue due forme di motivazione ad imparare la Matematica: gli studenti possono imparare la Matematica per piacere o interesse oppure perché percepiscono l'apprendimento della Matematica come utile per il proprio futuro professionale. PISA misura la motivazione intrinseca e quella strumentale attraverso quattro risposte: "molto d'accordo", "d'accordo", "in disaccordo", "molto in disaccordo" riguardanti il piacere e l'interesse nel fare Matematica. Nella tabella 2.11 qui sotto è riportata, per ogni domanda considerata, la somma delle percentuali di risposta ai primi due descrittori ("molto d'accordo", "d'accordo"). In Italia, come nei paesi dell'OCSE, la motivazione strumentale all'apprendimento della Matematica è di molto superiore alla motivazione intrinseca legata al piacere e all'interesse nello studio di questa disciplina. Si può notare come i valori della Provincia Autonoma di Bolzano per quanto riguarda l'indice di motivazione strumentale all'apprendimento della Matematica siano più basso rispetto al resto del Paese e dell'OCSE.

Tab./tav.: 1.11 - Distribuzione percentuale indice di motivazione intrinseca e strumentale

DOMANDE	OCSE	ITALIA	NOR D EST	Prov. Aut.TN	BZ it.	BZ lad .	BZ dt.
Indice di motivazione intrinseca							
Mi piacciono le letture che riguardano la Matematica.	30	31	26	27	28	20	12
Non vedo l'ora che arrivino le lezioni di Matematica.	36	29	25	24	28	45	27
Faccio Matematica perché mi piace.	38	45	41	44	43	36	23
Mi interessano le cose che imparo in Matematica.	52	57	53	54	50	60	37
Indice di motivazione strumentale							
Vale la pena impegnarsi in Matematica perché mi sarà utile nel lavoro che vorrei fare da grande.	74	68	71	74	62	68	65
Per me è importante imparare la Matematica perché migliorerà le mie prospettive professionali.	77	71	71	73	64	54	50
La Matematica è una materia importante per me perché mi servirà per i miei studi futuri.	65	64	65	67	56	47	44
In Matematica imparerò molte cose che mi serviranno per trovare un lavoro.	69	64	65	67	56	62	57

Indice del concetto di sé e di ansia rispetto alla Matematica

La convinzione nelle proprie capacità è un risultato importante e fortemente legata al successo nell'apprendimento. Le risposte a domande che riguardano l'idea di se stessi nei confronti della Matematica sono anche correlate alle domande che riguardano lo stato di stress e di ansia nei confronti di problemi matematici. Le possibili risposte sono quattro: "molto d'accordo", "d'accordo", "in disaccordo", "molto in disaccordo". La fiducia che gli studenti hanno nella propria capacità di risolvere specifici problemi di Matematica è strettamente associata ai risultati ottenuti in Matematica. Nei paesi dell'OCSE, l'auto-efficacia in Matematica è associata a una differenza di 49 punti. In Italia questa differenza è di 47 punti, in linea con la media OCSE.

In generale molti studenti si preoccupano per le loro prestazioni a scuola o agli esami, ma la percentuale di studenti che riferiscono di sentirsi in ansia per la Matematica è ancora maggiore. Gli studenti che hanno un alto indice di ansia rispetto alla Matematica hanno anche risultati inferiori. Nei paesi OCSE la differenza di performance che è associata a un cambiamento di una unità dell'indice di ansia corrisponde a 37 punti tra gli studenti ai livelli alti della scala di competenza e a 28 punti tra quelli nei livelli bassi. In Italia l'indice di ansia nei confronti della Matematica è più alto rispetto alla media OCSE.

Nella tabella 2.12 è riportata, per ogni domanda considerata, la somma delle percentuali di risposta ai primi due descrittori ("molto d'accordo", "d'accordo").

Possiamo osservare che in generale l'Italia ha un indice di ansia più elevato rispetto alla media OCSE e se analizziamo i dati della Provincia Autonoma di Bolzano scorporati per gruppi linguistici si osserva che nella scuola di lingua italiana l'indice di ansia è in linea con quello dell'Italia, mentre per gli altri due gruppi linguistici questo indice è inferiore ed in linea con la media OCSE:

Tab./tav.: 1.12 - Indice del concetto di sé e di ansia

DOMANDE	OCS E	ITALIA	NOR D EST	Prov. Aut.T N	BZ it.	BZ lad .	BZ dt.
Indice di concetto di sé							
Non sono proprio bravo/a in Matematica.	42	47	47	46	52	43	39
Ho buoni voti in Matematica.	58	60	61	65	59	57	59
In Matematica imparo rapidamente.	51	51	50	54	47	52	52
Ho sempre pensato che la Matematica sia una delle materie in cui vado meglio.	38	40	39	40	36	41	32
Durante le lezioni di Matematica, capisco anche gli argomenti più difficili.	37	43	43	46	41	33	35
Indice di ansia							
Mi preoccupa spesso l'idea di avere delle difficoltà nelle lezioni di Matematica.	59	72	71	67	69	55	52

Mi sento molto teso/a quando devo fare dei compiti a casa di Matematica.	32	35	32	29	37	36	29
Mi sento molto nervoso/a quando devo risolvere dei problemi di matematica.	30	42	40	33	44	36	23
Quando mi metto a risolvere un problema di matematica, sento di non farcela.	29	42	39	37	45	26	27
Mi preoccupa l'idea di prendere brutti voti in Matematica.	60	78	78	74	77	52	49

2.7. Il ruolo del docente nell'insegnamento della Matematica

L'importanza del ruolo docente nell'apprendimento della Matematica si manifesta nella qualità della pratica didattica e nello specifico riguarda sia l'attenzione verso le esigenze di studenti e studentesse, sia l'organizzazione delle lezioni. La rilevazione PISA raccoglie le informazioni relative al ruolo del docente nell'insegnamento della Matematica attraverso il questionario studente, che nella sezione: "Le tue esperienze con la Matematica" pone domande relative alla frequenza con cui alcune lezioni vengono messe in atto nel corso delle lezioni di questa disciplina. Il questionario studente prevede quattro possibili risposte: "in tutte le lezioni - nella maggior parte delle lezioni - in qualche lezione - mai o quasi mai." Nelle tabelle qui riportate, per ogni domanda considerata, sono indicate, in percentuale, le risposte corrispondenti alla somma delle prime due possibilità, cioè "in tutte le lezioni" e "nella maggior parte delle lezioni".

Strategie inerenti l'attivazione cognitiva

Alle domande riguardanti le strategie inerenti l'attivazione cognitiva, le risposte degli studenti italiani indicano che tali strategie sono messe in atto generalmente in percentuale lievemente minore rispetto alla media OCSE e ciò può essere osservato anche nelle risposte degli studenti della Provincia Autonoma di Bolzano. In particolare è interessante notare, che le minori percentuali (tutte <50%) sono indicate per le affermazioni che riguardano l'autonomia decisionale degli studenti rispetto a possibili soluzioni dei problemi ed alle soluzioni "non ovvie" dei problemi e questo non solo in Italia o nella nostra Provincia, ma anche nell'area OCSE.

Tab./tav.: 1.13 - Indice valutazione formativa

DOMANDE	OCSE	ITALIA	NORD EST	Prov. Aut.TN	BZ it.	BZ lad	BZ dt.
L'insegnante pone domande che ci fanno riflettere sul problema.	59	59	56	55	58	53	44
L'insegnante ci assegna problemi che ci richiedono di riflettere a lungo.	53	49	47	42	56	61	56
L'insegnante ci chiede di decidere da soli i procedimenti per risolvere problemi complessi.	42	41	40	38	47	41	45
L'insegnante pone problemi per i quali non c'è un metodo di soluzione che risulti subito ovvio.	47	44	47	44	49	25	46
L'insegnante pone problemi in contesti differenti in modo che gli studenti possano verificare se hanno capito i concetti.	59	57	52	50	52	61	48
L'insegnante ci aiuta ad imparare dai nostri errori.	60	58	54	52	50	62	51
L'insegnante ci chiede di spiegare come abbiamo risolto un problema.	70	70	69	64	68	63	61
L'insegnante pone problemi che richiedono agli studenti di applicare ciò che hanno appreso a nuovi contesti.	62	68	67	67	68	68	60
L'insegnante assegna problemi che possono essere risolti in modi differenti.	60	55	56	60	60	49	57

La conduzione della lezione

L'organizzazione e le indicazioni che l'insegnante fornisce agli studenti ed alle studentesse nel corso della lezione, assumono un ruolo importante nella comprensione della disciplina, perché ripercorrono la rotta intrapresa con la classe e tracciano quella futura. Dal questionario studente emerge che, generalmente, in quasi tutte le azioni vengono messe in atto con percentuali superiori al 50%. Solo quando viene fatto riferimento ad un breve riassunto della lezione precedente la percentuale si abbassa notevolmente, sia nella media OCSE, sia in tutte le altre considerate.

Tab./tav.: 1.14 - Indice di conduzione della lezione

DOMANDE	OCSE	ITALIA	NORD EST	Prov. Aut. TN	BZ it.	BZ lad.	BZ dt.
L'insegnante stabilisce degli obiettivi chiari per il nostro apprendimento.	69	68	65	60	63	76	66
L'insegnante chiede a me o ai miei compagni di esporre i nostri pensieri o ragionamenti in modo esauriente.	56	47	43	40	54	43	68
L'insegnante pone delle domande per controllare se abbiamo capito la lezione.	71	71	67	68	69	63	61
All'inizio della lezione l'insegnante fa un breve riassunto della lezione precedente.	41	35	32	31	32	34	31
L'insegnante ci dice che cosa dobbiamo imparare.	80	75	74	70	71	85	74

Uso della della valutazione formativa da parte dei docenti

Quanto sto andando bene in Matematica? Posso contare su alcuni miei punti forti? Avere risposte a queste domande è, per lo studente, un riferimento importante per fondare la consapevolezza del proprio sapere, nonché una base su cui fondare il proprio recupero. Dalle risposte dei questionari emerge che gli studenti non percepiscono come frequenti queste azioni, mentre hanno coscienza che gli insegnanti comunicano cosa si aspettano da loro in occasione delle verifiche o delle interrogazioni. È interessante notare quanto la percentuale delle risposte segua un andamento simile – pur con variazioni interne anche notevoli – in tutte le aree qui prese in considerazione.

Tab./tav.: 1.15 - Indice valutazione formativa

DOMANDE	OCSE	ITALIA	NORD EST	Prov. Aut. TN	BZ it.	BZ lad.	BZ dt.
L'insegnante mi comunica se sto andando bene in Matematica.	31	40	33	34	38	16	28
L'insegnante mi informa sui miei punti forti e deboli in Matematica.	26	33	27	24	28	30	28
L'insegnante ci comunica cosa si aspetta da noi in occasione di una verifica, un'interrogazione o un compito.	61	62	60	57	60	60	63

L'insegnante mi dice cosa devo fare per migliorare in Matematica.	47	49	43	42	45	55	46
---	----	----	----	----	----	----	----

Orientamento degli studenti nel corso delle lezioni di Matematica

Metodi di insegnamento che favoriscano la sperimentazione di un lavoro autonomo o in piccoli gruppi, che permettano una progressione efficace di tutti i componenti la classe, che coinvolgano gli studenti anche nella fase progettazione delle lezioni: questo è il tema di tale gruppo di informazioni. La scuola italiana e la scuola della Provincia Autonoma di Bolzano, raggiungono percentuali considerevolmente minori rispetto alla media OCSE (che pur presenta percentuali relativamente basse), se riferite alle prime tre azioni, mentre emerge una maggiore attenzione ai temi riguardanti il coinvolgimento sulla programmazione delle attività.

Tab./tav.: 1.16 - Indice di orientamento

DOMANDE	OCSE	ITALIA	NORD EST	Prov. Aut. TN	BZ it.	BZ lad.	BZ dt.
L'insegnante assegna compiti diversi ai compagni che hanno difficoltà di apprendimento e/o a quelli che apprendono più facilmente.	30	13	12	12	16	28	27
L'insegnante assegna progetti che richiedono almeno una settimana per essere portati a termine.	17	10	8	9	11	6	12
L'insegnante ci fa lavorare in piccoli gruppi per giungere a soluzioni comuni di un problema o di un compito.	23	15	12	15	18	16	26
L'insegnante ci coinvolge nella programmazione delle attività o degli argomenti da trattare durante le lezioni.	17	46	41	37	42	30	14