



PISA 2012

Quadro di Riferimento analitico

per la Matematica, la Lettura, le Scienze,
il Problem Solving e la Financial Literacy



Programme for International Student Assessment

PISA

PISA 2012

Quadro di Riferimento analitico

per la Matematica, la Lettura, le Scienze,
il Problem Solving e la Financial Literacy

Il presente volume è pubblicato sotto la responsabilità del Segretariato dell'OCSE. Le opinioni espresse e le argomentazioni utilizzate non riflettono però necessariamente le posizioni ufficiali dell'Organizzazione o dei governi dei paesi membri.

Il presente documento e qualsiasi carta geografica eventualmente utilizzata all'interno di esso sono da intendersi senza pregiudizio della sovranità territoriale, delle frontiere internazionali, dei confini e delle denominazioni di territori, città o aree geografiche.

Titolo originale dell'opera:

OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing.
<http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>

ISBN 978-92-64-19052-8 (versione originale a stampa)

ISBN 978-92-64-19051-1 (versione originale scaricabile in PDF)

Edizione italiana:

PISA 2012, *Quadro di Riferimento analitico per la Matematica, la Lettura, le Scienze, il Problem Solving e la Financial Literacy*

http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012.php?page=pisa2012_it_06

La versione italiana è stata curata dall'INVALSI (Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione).

Traduzione a cura di BRANTRA bvba. Revisione dei capitoli a cura di M. Alessandra Scalise.

I dati statistici riguardanti Israele sono forniti dalle autorità israeliane competenti e sotto la responsabilità delle stesse. L'utilizzo di tali dati da parte dell'OCSE, secondo il diritto internazionale, è senza pregiudizio per lo status dei territori denominati Altura del Golan, Gerusalemme Est e degli insediamenti israeliani in Cisgiordania.

Crediti fotografici:

© khoa vu/Flickr/Getty Images

© Shutterstock/Kzenon

© Simon Jarratt/Corbis

L'elenco delle correzioni alle pubblicazioni dell'OCSE può essere consultato online presso:

www.oecd.org/publishing/corrigenda. © OECD 2013

I diritti di riproduzione totale o parziale delle pubblicazioni, dei dati e dei prodotti multimediali dell'OCSE in documenti, presentazioni, blog, siti web o testi didattici appartengono all'OCSE, che deve essere debitamente citata come fonte nel rispetto del diritto d'autore. Ogni richiesta di autorizzazione all'uso pubblico o commerciale dei materiali deve essere indirizzata a rights@oecd.org

Le richieste di autorizzazione a fotocopiare parte del materiale devono essere indirizzate direttamente al Copyright Clearance Center (CCC) presso info@copyright.com o al Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC) presso contact@cfcopies.com.



1

PISA 2012

Quadro di riferimento per la Matematica

Il quadro di riferimento per la matematica di PISA 2012 illustra le basi teoriche della rilevazione PISA per la matematica e presenta una nuova definizione formale di literacy matematica, i processi matematici che gli studenti utilizzano quando attingono alla propria literacy matematica e le competenze matematiche di base che sottendono tali processi. Il quadro di riferimento presenta la ripartizione delle conoscenze matematiche in quattro categorie di contenuto e sottolinea le conoscenze che sono importanti da valutare negli studenti di 15 anni. Esso inoltre descrive le quattro categorie di contesto nel cui ambito gli studenti si troveranno ad affrontare problemi matematici, indica le percentuali di item per ciascuna categoria di contenuto e di contesto, per ciascun formato di risposta e per ciascun processo e descrive lo schema di rotazione dei quesiti nei fascicoli. Ogni fascicolo è costituito da item di diversa difficoltà. Nel quadro di riferimento è poi descritta la somministrazione delle prove di matematica in formato elettronico, che in questo ciclo si presenta solo come un'opzione internazionale, e ne analizza la ragion d'essere e il potenziale di sviluppo. Le varie suddivisioni in categorie sono illustrate tramite sette prove in indagini e prove sul campo PISA. Vengono descritte varie misure per il controllo di qualità. La rilevazione PISA misurerà il grado di efficacia con la quale i diversi paesi preparano gli studenti all'utilizzo della matematica nei vari aspetti della loro vita personale, civile e professionale, in qualità di cittadini impegnati, che riflettono e che svolgono un ruolo costruttivo nella società.



INTRODUZIONE

La rilevazione delle competenze matematiche ha un ruolo di preminenza all'interno del quadro di riferimento PISA 2012, poiché la matematica rappresenta il principale ambito di rilevazione. Sebbene presente anche nei cicli PISA 2000, 2006 e 2009, soltanto nel 2003 la matematica è stata ambito di indagine principale.

Il fatto che la matematica in PISA 2012 sia nuovamente ambito principale di rilevazione offre l'opportunità, non solo di eseguire raffronti del rendimento degli studenti nel tempo, ma anche di riesaminare quanto valutato alla luce dei cambiamenti avvenuti in questo campo e nelle politiche e pratiche educative. La sfida consiste dunque nello sviluppare un quadro di riferimento per la matematica aggiornato e all'avanguardia mantenendo, al tempo stesso, un ancoraggio, in termini psicometrici, con le valutazioni precedenti, in una linea di tendenza capace di guardare sia avanti che indietro. Il quadro di riferimento di PISA 2012 si propone di descrivere in una forma più chiara ed esplicita quale sia la matematica rilevante per studenti quindicenni, garantendo al tempo stesso che gli item sviluppati rimangano inseriti in contesti autentici e significativi. Il ciclo della modellizzazione matematica, già utilizzato nei quadri di riferimento precedenti (p. es. OCSE, 2003) per descrivere i passaggi eseguiti dagli studenti nella risoluzione di problemi contestualizzati, rimane uno degli elementi fondamentali del quadro di riferimento di PISA 2012. Tale ciclo viene utilizzato per aiutare a definire i processi matematici utilizzati dagli studenti nel risolvere i problemi, processi che sono utilizzati per la prima volta nel 2012 in quanto dimensione primaria per la presentazione dei risultati. Il quadro di riferimento, inoltre, rende conto del fatto che, nel 2012, è stata proposta per la prima volta, anche se su base facoltativa, una nuova modalità di somministrazione delle prove di matematica, quella computerizzata (Computer-Based Assessment of Mathematics, CBAM).

Il quadro di riferimento per la matematica di PISA 2012 è suddiviso in macrosezioni. La prima sezione, "Definizione di literacy matematica", descrive i fondamenti teorici della rilevazione delle competenze matematiche e presenta una definizione formale del costruito della literacy matematica. La seconda sezione, "Organizzazione dell'ambito", descrive tre aspetti: a) i processi matematici e le capacità matematiche fondamentali (definite "competenze" nei quadri di riferimento precedenti) alla base di tali processi; b) il modo in cui la conoscenza dei contenuti matematici è organizzata all'interno del quadro di riferimento di PISA 2012 e le conoscenze che sono importanti da valutare in studenti di 15 anni – vengono riportati i punteggi sia per le tre categorie di processi matematici sia per le quattro categorie di contenuti matematici – ; e c) i contesti nei quali gli studenti dovranno affrontare i problemi matematici. La terza sezione, "rilevazione della literacy matematica", delinea gli aspetti strutturali della rilevazione e comprende varie informazioni di carattere tecnico. Le varie appendici contengono ulteriori descrizioni delle capacità matematiche fondamentali, alcuni item forniti a titolo esemplificativo e i riferimenti bibliografici.

Questo quadro di riferimento è stato elaborato sotto la direzione di un gruppo di esperti di matematica (Mathematics Expert Group, MEG), nominato dai principali contraenti di PISA con l'approvazione del PISA Governing Board (PGB). Il MEG è costituito da dieci membri e comprende matematici, insegnanti di matematica ed esperti di valutazione, tecnologia e pedagogia provenienti da paesi diversi. Inoltre, al fine di garantire un più ampio apporto di contributi, una bozza del quadro di riferimento per la matematica di PISA 2012 è stata sottoposta a più di 170 esperti in matematica di oltre 40 paesi. Achieve e l'Australian Council for Educational Research (ACER), le due organizzazioni incaricate dall'Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico (OCSE) di curare lo sviluppo del quadro di riferimento, hanno altresì condotto diverse azioni di ricerca per approfondire e sostenere il lavoro di sviluppo. Lo sviluppo del quadro di riferimento e l'intera indagine PISA sono stati sostenuti e approfonditi dall'incessante lavoro dei paesi coinvolti (si veda a tal proposito la ricerca presentata nella pubblicazione dell'OCSE 2010 *Pathways to Success: How knowledge and skills at age 15 shape future lives in Canada*).

DEFINIZIONE DI LITERACY MATEMATICA

La comprensione della matematica costituisce un elemento fondamentale della preparazione di un giovane alla vita nella società moderna. È necessario possedere un certo livello di comprensione della matematica, degli strumenti matematici e del ragionamento matematico, per poter comprendere a fondo un numero sempre crescente di problemi e situazioni della vita quotidiana, anche in ambito professionale, e farvi fronte. La matematica è uno strumento fondamentale per i giovani che si trovano ad affrontare sfide e problemi in diversi ambiti (personale, professionale, sociale e scientifico) della loro vita. È dunque importante riuscire a comprendere se il livello di preparazione dei ragazzi che giungono al termine dell'obbligo scolastico sia tale da consentire loro di essere adeguatamente preparati ad applicare la matematica per comprendere temi importanti e risolvere problemi reali. Rilevare le competenze matematiche all'età di 15 anni permette di ottenere una prima indicazione del modo in cui gli studenti potrebbero rispondere alle diverse situazioni connesse alla matematica che dovranno affrontare in momenti successivi della loro vita.

Come base per un'indagine internazionale mirata agli studenti di 15 anni, è ragionevole chiedersi: "Cosa è importante che i cittadini conoscano e sappiano fare in situazioni che prevedono il ricorso alla matematica? "Più nello specifico, che cosa significa avere una competenza matematica per un ragazzo di 15 anni che potrebbe aver raggiunto il termine dell'obbligo scolastico o essere in procinto di intraprendere una formazione professionale più specializzata o un percorso universitario? È importante che il costruito della literacy matematica, utilizzata in questo rapporto per indicare la capacità degli studenti di formulare, utilizzare e interpretare



la matematica in una serie di contesti diversi, non sia inteso quale sinonimo di conoscenza e competenza minima o di basso livello. Piuttosto, intende descrivere le capacità degli studenti di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere determinati fenomeni. Questa concezione di literacy matematica sottolinea l'importanza del fatto che gli studenti sviluppino una solida comprensione dei concetti di matematica pura e dei vantaggi dell'essere impegnati in esplorazioni del mondo astratto della matematica. Il costrutto della literacy matematica, secondo la definizione di PISA, insiste decisamente sulla necessità di sviluppare la capacità degli studenti di utilizzare la matematica in contesto ed è pertanto importante che compiano esperienze significative durante il loro corso di studio della matematica che permettano loro di riuscire a sviluppare tale capacità. E questo vale sia per gli studenti di 15 anni che si avvicinano al termine della loro formazione matematica sia per coloro che decideranno di intraprendere studi matematici più avanzati. È il caso di aggiungere inoltre che, per quasi tutti gli studenti, la motivazione all'apprendimento della matematica aumenta nel momento in cui si rendono conto dell'importanza di questo apprendimento in relazione ad altre materie e al mondo extra-scolastico.

Ovviamente, la literacy matematica trascende le fasce d'età. Tuttavia la sua rilevazione nei ragazzi di 15 anni deve tenere conto di importanti caratteristiche proprie di questi studenti e vi è pertanto la necessità di individuare contenuti, linguaggi e contesti adatti alla loro età. Il presente quadro di riferimento distingue tra ampie categorie di contenuto, che sono importanti per la literacy matematica di tutti gli individui in generale, e i contenuti specifici, più appropriati per studenti di 15 anni. La literacy matematica non è un attributo che si possiede oppure no, si caratterizza piuttosto come un continuum che comprende una literacy matematica più o meno accentuata secondo i soggetti, ma con un potenziale di sviluppo comunque sempre presente.

Nell'ambito di PISA 2012, la literacy matematica viene definita come segue:

Definizione di literacy matematica in PISA 2012: La literacy matematica è la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.

Forniamo di seguito alcune note esplicative allo scopo di mettere in luce e chiarire taluni aspetti particolarmente importanti della definizione.

Studenti come soggetti attivi nella risoluzione di problemi nell'ambito di PISA 2012

Il linguaggio utilizzato per la definizione di literacy matematica è incentrato su un coinvolgimento attivo con la matematica ed è inteso a comprendere la formulazione di un ragionamento matematico e l'utilizzo di concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere determinati fenomeni. In particolare, i verbi 'formulare', 'utilizzare' e 'interpretare' indicano i tre processi nei quali gli studenti saranno attivamente impegnati per risolvere i problemi. La formulazione in forma matematica include il capire quali sono le occasioni in cui applicare e usare la matematica, vale a dire la capacità di rendersi conto del fatto che è possibile applicare la matematica per comprendere o risolvere un particolare problema o sfida. Include la capacità di prendere una situazione così come si presenta e trasformarla in una forma gestibile in modo matematico, creando strutture e rappresentazioni matematiche, identificando le variabili e formulando ipotesi semplificative che aiutino a risolvere il problema o la sfida. L'utilizzo della matematica prevede l'applicazione del ragionamento matematico e l'utilizzo di concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per arrivare a una soluzione matematica. Comprende l'esecuzione di calcoli, la manipolazione di espressioni ed equazioni algebriche o di altri modelli matematici, l'analisi delle informazioni in forma matematica a partire da diagrammi e grafici matematici, lo sviluppo di descrizioni e spiegazioni matematiche e l'utilizzo di strumenti matematici per giungere alla soluzione dei problemi. L'interpretazione matematica prevede la riflessione su soluzioni o risultati matematici e la conseguente interpretazione nel contesto del problema o della sfida. Implica la valutazione di soluzioni o ragionamenti matematici in relazione al contesto del problema per comprendere se i risultati siano ragionevoli e sensati nella situazione data.

Il linguaggio usato per la definizione mira inoltre a integrare nella definizione di literacy matematica per il ciclo 2012 la nozione di modellizzazione matematica, da sempre uno dei capisaldi del quadro di riferimento di PISA per la matematica (si veda OCSE, 2003). Dato che gli studenti usano la matematica e gli strumenti matematici per risolvere problemi contestualizzati, il loro lavoro prevede una serie di passaggi. La figura 1.1 mostra una panoramica dei principali costrutti del presente quadro di riferimento e indica le relazioni esistenti tra essi.

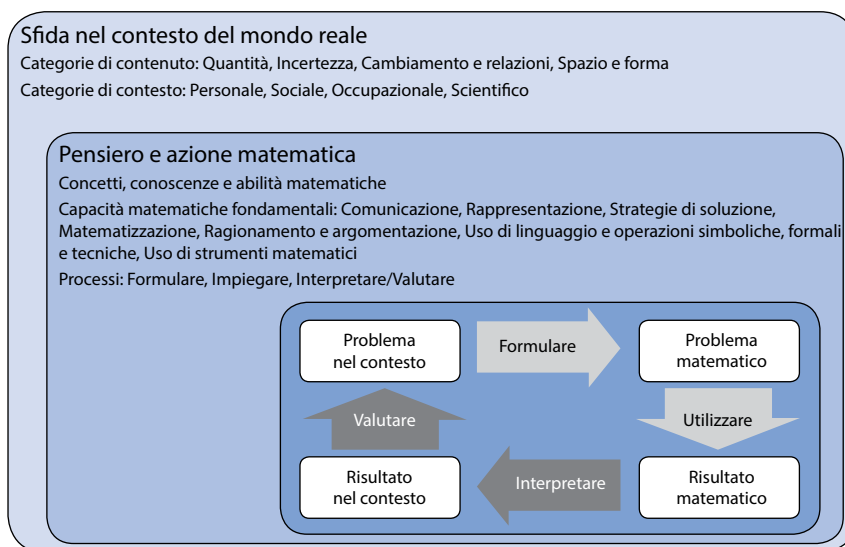
- Il riquadro esterno della figura 1.1 mostra che la literacy matematica si esprime nel contesto di una sfida o di un problema che ha origine nel mondo reale. In questo quadro di riferimento, i problemi vengono caratterizzati sulla base di due elementi. Le categorie di contesto (che saranno descritte nel prosieguo di questo documento) identificano gli ambiti

della vita da cui emergono i problemi. Il contesto può essere di natura personale, con problemi o sfide che potrebbero presentarsi al singolo, alla famiglia o a un gruppo di pari, oppure inserito in un contesto sociale (incentrato sulla comunità, sia essa locale, nazionale o globale), professionale (incentrato sul mondo del lavoro) o scientifico (relativo all'applicazione della matematica al mondo naturale e alla tecnologia). Il secondo elemento che caratterizza un problema è la natura del fenomeno matematico soggiacente. Le quattro categorie di contenuto matematico identificano ampie classi di fenomeni per l'analisi dei quali è stata creata la matematica. Anche queste categorie di contenuto matematico (Quantità, Incertezza e dati, Cambiamento e relazioni e Spazio e forma) sono descritte nel riquadro esterno della figura 1.1.

- Per risolvere tali problemi contestualizzati, gli studenti devono applicare al problema il pensiero e l'azione matematica e questo processo viene qui descritto sulla base di tre dimensioni. In primo luogo, la figura 1.1 indica la necessità che lo studente attinga da un insieme di concetti, conoscenze e competenze matematiche nel corso del lavoro. Tali conoscenze matematiche intervengono quando lo studente interpreta la situazione e la comunica in modo matematico, elabora strategie, ragiona e sviluppa argomentazioni e così via. Queste azioni matematiche sono caratterizzate nel presente quadro di riferimento in funzione di sette capacità matematiche fondamentali elencate nella figura 1.1 e descritte in maniera più dettagliata nel prosieguo del documento. Allorché uno studente lavora alla soluzione di un problema, che può richiedere la formulazione del problema, l'impiego di concetti o procedimenti matematici o l'interpretazione di una soluzione matematica, attiva successivamente e contemporaneamente le capacità matematiche fondamentali usando il contenuto matematico adeguato per creare una soluzione.
- La rappresentazione grafica del ciclo della modellizzazione matematica riportata nel riquadro interno della figura 1.1 indica una versione idealizzata e semplificata dei passaggi seguiti da chi risolve un problema mostrando la propria literacy matematica. Mostra una serie idealizzata di passaggi che iniziano dal "problema contestualizzato". Chi risolve il problema cerca di individuare gli aspetti matematici rilevanti della situazione e formula la situazione in forma matematica basandosi sui concetti e sulle relazioni individuati e sulle ipotesi semplificatrici formulate, dopo di che trasforma il "problema contestualizzato" in un "problema matematico", cioè gestibile in modo matematico. La freccia rivolta verso il basso presente nella figura 1.1 descrive il lavoro compiuto da chi risolve il problema quando utilizza concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per ottenere "risultati matematici". Questo passaggio prevede generalmente l'applicazione di un ragionamento matematico, manipolazione, trasformazione e calcolo. Successivamente, i "risultati matematici" devono essere interpretati in base al problema originale ("risultati contestualizzati"). Questo processo implica un'interpretazione, un'applicazione e una valutazione dei risultati matematici da parte di chi risolve il problema e un giudizio circa la plausibilità degli stessi nel contesto di un problema basato sul mondo reale. Questi processi di formulazione, utilizzo e interpretazione della matematica sono elementi fondamentali sia del ciclo della modellizzazione matematica sia della definizione di literacy matematica. Ciascuno di essi si basa su capacità matematiche fondamentali che, a loro volta, si basano sulla conoscenza di argomenti matematici specifici da parte di chi risolve il problema.

• Figura 1.1 •

L'applicazione pratica del modello di literacy matematica



Il ciclo della modellizzazione è uno degli aspetti fondamentali della concezione di PISA che vede gli studenti come soggetti attivi nella risoluzione di problemi; tuttavia non è sempre necessario effettuare tutti i passaggi di tale ciclo, soprattutto nell'ambito di



una rilevazione (Niss et al., 2007). Accade spesso infatti che parti importanti del ciclo della modellizzazione matematica siano già state svolte da altri e che l'utente finale compia solamente alcuni passaggi del ciclo della modellizzazione. Per esempio, in alcuni casi, le rappresentazioni matematiche, come i grafici o le equazioni, sono fornite già pronte per essere manipolate direttamente per rispondere a domande o trarre conclusioni. È per questo motivo che molti degli item PISA comprendono solamente alcuni passaggi del ciclo della modellizzazione. Nei fatti, può accadere che chi risolve il problema passi da un processo all'altro, tornando indietro per rivedere decisioni già prese o ipotesi già formulate in precedenza. Ciascuno dei processi può presentare sfide notevoli, pertanto potrebbero essere necessarie diverse iterazioni all'interno del ciclo.

Un collegamento esplicito a una molteplicità di contesti per i problemi in PISA 2012

Il riferimento a “una molteplicità di contesti” presente nella definizione di literacy matematica non è casuale e deve essere inteso come uno strumento per creare un collegamento ai contesti specifici descritti ed illustrati più avanti in questo quadro di riferimento. I contesti specifici non hanno una grande importanza in quanto tali, ma le quattro categorie selezionate in questa sede (personale, professionale, sociale e scientifico) riflettono un'ampia gamma di situazioni nelle quali gli studenti potrebbero incontrare opportunità matematiche. La definizione indica inoltre che la literacy matematica aiuta gli studenti a riconoscere il ruolo che la matematica svolge nel mondo, a formulare giudizi fondati e a prendere le decisioni da cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.

Un ruolo visibile per gli strumenti matematici, tecnologia compresa in PISA 2012

La definizione di literacy matematica include esplicitamente l'uso di strumenti matematici. Tali strumenti comprendono apparecchiature fisiche e digitali, software e dispositivi di calcolo.¹ Gli strumenti matematici informatizzati sono di uso corrente nei luoghi di lavoro del XXI secolo e lo saranno sempre di più in futuro. La natura dei problemi connessi al mondo del lavoro e del ragionamento logico si è estesa di fronte a queste nuove opportunità, dando adito a maggiori aspettative in relazione alla literacy matematica.

La rilevazione computerizzata della matematica è un elemento di assoluta novità in PISA 2012 ed è proposta come opzione ai paesi partecipanti. Il riferimento a strumenti matematici nella definizione di literacy matematica risulta pertanto particolarmente appropriato. L'uso della calcolatrice è stato consentito in tutte le indagini PISA di matematica che si sono svolte fino ad oggi laddove le politiche dei paesi partecipanti lo consentivano. Sebbene in passato gli item per la matematica fossero concepiti per essere il meno possibile sensibili all'uso o meno della calcolatrice, per alcuni item delle prove “carta e matita” somministrate agli studenti nel 2012 la calcolatrice potrebbe rappresentare un effettivo aiuto; e per la componente computerizzata opzionale dell'indagine, strumenti matematici, quali una calcolatrice online, saranno inseriti nell'ambiente virtuale di alcune domande. Poiché gli item PISA riflettono problemi che emergono in contesti personali, professionali, sociali e scientifici e le calcolatrici sono spesso utilizzate in tali contesti, una calcolatrice è di aiuto in alcuni degli item PISA. La rilevazione computerizzata permette di inserire una più ampia gamma di strumenti matematici quali software statistici, applicazioni per la visualizzazione e costruzione geometrica e strumenti di misurazione virtuali negli item di rilevazione. Questo riflette il mezzo che sempre più persone utilizzano nel relazionarsi al proprio mondo e nel risolvere i problemi, e permette altresì di valutare alcuni aspetti della literacy matematica difficilmente valutabili attraverso le tradizionali prove scritte.

ORGANIZZAZIONE DELL'AMBITO

Il quadro di riferimento per la matematica definisce l'ambito della matematica per l'indagine PISA e descrive un approccio alla rilevazione della literacy matematica nei quindicenni. In altre parole, PISA valuta la misura in cui gli studenti di 15 anni sono in grado di utilizzare la matematica quando si trovano davanti a determinate situazioni e problemi, presentati nella maggior parte dei casi in contesti reali.

Ai fini della rilevazione, la definizione di literacy matematica del ciclo 2012 può essere analizzata sulla base di tre aspetti interconnessi:

- i processi matematici che descrivono ciò che fanno gli studenti per collegare il contesto del problema alla matematica e quindi risolvere il problema, e le capacità soggiacenti a tali processi;
- il contenuto matematico da utilizzare negli item; e
- i contesti nei quali sono inseriti gli item.

¹ In alcuni paesi, il termine “strumenti matematici” può riferirsi anche a procedimenti matematici costituiti, come gli algoritmi. Nell'ambito del quadro di riferimento di PISA, il termine “strumenti matematici” si riferisce esclusivamente agli strumenti fisici e digitali descritti in questa sezione.



Le sezioni che seguono approfondiscono tali aspetti. Mettendo in evidenza questi aspetti dell'ambito, il quadro di riferimento per la matematica del PISA 2012 garantisce che gli item sviluppati per l'indagine riflettano una molteplicità di processi, contenuti e contesti tali per cui, considerati nel loro insieme, traducano efficacemente quanto fin qui definito come literacy matematica. Diverse domande, che partono dalla definizione di literacy matematica del ciclo PISA 2012, sono alla base della presente sezione del quadro di riferimento. Tale domande sono:

- Quali sono i processi seguiti dagli studenti per la risoluzione di problemi di matematica contestualizzati? E quali capacità ci aspettiamo che questi studenti siano in grado di dimostrare con l'aumentare della loro literacy matematica?
- Quali contenuti matematici ci aspettiamo che gli studenti, e in particolare gli studenti di 15 anni, conoscano?
- In quali contesti può essere osservata e valutata la literacy matematica?

Processi matematici e capacità matematiche soggiacenti

Processi matematici

Secondo la definizione, la literacy matematica è la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in svariati contesti. Questi tre termini (formulare, utilizzare e interpretare) costituiscono una struttura utile e significativa per l'organizzazione dei processi matematici che descrivono quanto gli studenti fanno nel collegare il contesto di un problema alla matematica e risolvere tale problema. Per la prima volta, l'indagine 2012 sulla matematica riporterà i risultati sulla base di tali processi matematici con una struttura in grado di offrire categorie utili e pertinenti per l'azione pubblica. Le categorie da utilizzare per la presentazione dei risultati sono le seguenti:

- Formulazione di situazioni in forma matematica;
- Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici;
- Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici.

È importante che sia i responsabili politici sia i soggetti più direttamente coinvolti nella formazione degli studenti sappiano fino a che punto gli studenti sono in grado di ricorrere a ciascuno di questi processi. I risultati dell'indagine PISA sul processo di formulazione indicano l'efficacia con la quale gli studenti sono in grado di riconoscere e identificare le opportunità di usare la matematica in situazioni problematiche e di fornire quindi la struttura matematica necessaria per formulare in modo matematico un dato problema contestualizzato. I risultati dell'indagine PISA sul processo di utilizzo indicano la misura in cui gli studenti sono in grado di eseguire calcoli e manipolazioni e applicare concetti e fatti noti per giungere alla soluzione matematica di un dato problema formulato matematicamente. I risultati dell'indagine PISA sul processo di interpretazione indicano l'efficacia con la quale gli studenti sono in grado di riflettere sulle soluzioni o conclusioni matematiche, di interpretarle nel contesto di un problema reale e di determinare se tali risultati o conclusioni sono plausibili. La facilità con cui gli studenti applicano la matematica a una molteplicità di problemi e situazioni dipende dalle competenze inerenti a ciascuno di questi tre processi e riuscire a comprenderne l'efficacia in ciascuna categoria può risultare utile sia per alimentare il dibattito sulle politiche educative sia per prendere decisioni a livello di scuola o classe.

Formulazione di situazioni in forma matematica

Il termine formulare presente nella definizione di literacy matematica si riferisce alla capacità degli studenti di riconoscere e individuare le opportunità di usare la matematica e di fornire quindi una struttura matematica a un problema presentato in forma contestualizzata. Nel processo di formulazione delle situazioni in forma matematica, gli studenti determinano i punti da cui estrarre gli elementi matematici necessari per analizzare, impostare e risolvere il problema. Eseguono un processo di traslazione da un contesto reale a un ambito matematico e conferiscono al problema una struttura, una rappresentazione e una specificità di tipo matematico. Ragionano e interpretano le limitazioni e le ipotesi poste dal problema. Nello specifico, questo processo di formulazione delle situazioni in forma matematica comprende attività quali:

- identificazione degli aspetti matematici di un problema inserito in un contesto reale e identificazione delle variabili significative;
- riconoscimento della struttura matematica (ivi compresi regolarità, relazioni e modelli o pattern) nei problemi o nelle situazioni;
- semplificazione di una situazione o di un problema al fine di renderli gestibili mediante un'analisi matematica;
- identificazione delle limitazioni e delle ipotesi alla base della modellizzazione matematica e delle semplificazioni desunte dal contesto;



- rappresentazione di una situazione in forma matematica, attraverso l'utilizzo di variabili, simboli, diagrammi e modelli standard adeguati;
- rappresentazione di un problema in modo diverso, ivi comprese la sua organizzazione in base a concetti matematici e la formulazione di ipotesi appropriate;
- comprensione e spiegazione delle relazioni esistenti tra il linguaggio specifico del contesto di un problema e il linguaggio simbolico e formale necessario per rappresentarlo in forma matematica;
- traduzione di un problema in un linguaggio o in una rappresentazione di carattere matematico;
- riconoscimento degli aspetti di un problema che corrispondono a problemi, concetti, fatti o procedimenti matematici noti; e
- utilizzo della tecnologia (ad es. un foglio elettronico o le funzioni di una calcolatrice grafica) per tracciare una relazione matematica inerente al problema contestualizzato.

La prova 'Pizze' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) si basa in larga misura sulle capacità degli studenti di formulare una situazione in forma matematica. Gli studenti sono chiamati ad eseguire calcoli per risolvere il problema e a interpretare i risultati per comprendere quale pizza presenti il vantaggio economico maggiore, ma la vera sfida cognitiva di questa prova risiede nella capacità di formulare un modello matematico che racchiuda il concetto di prezzo più conveniente. Chi risolve il problema deve riconoscere che, avendo le pizze tutte lo stesso spessore ma diametri differenti, l'analisi deve essere incentrata sull'area della superficie circolare delle pizze. La relazione tra quantità di pizza e somma di denaro risulta dunque integrata nel concetto di prezzo più conveniente, modellizzato in funzione del costo per unità di superficie. La prova 'Concerto rock' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) costituisce un ulteriore esempio di prova basata in larga misura sulle capacità degli studenti di formulare una situazione in forma matematica, infatti prevede che interpretino le informazioni contestuali fornite (dimensione e forma del campo, il fatto che il concerto rock è tutto esaurito e il fatto che i fan stanno in piedi) e le traducano in una forma matematica utile ai fini di una stima del numero di persone presenti al concerto.

Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici

Il termine utilizzare presente nella definizione di literacy matematica fa riferimento alla capacità degli studenti di applicare concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici per risolvere problemi formulati in forma matematica e giungere a conclusioni matematiche. Nel processo di utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici finalizzato alla risoluzione di problemi, gli studenti mettono in atto tutti i procedimenti necessari per ottenere i risultati e giungere a una soluzione matematica (ad es. eseguendo calcoli aritmetici, risolvendo equazioni, facendo deduzioni logiche a partire da ipotesi matematiche, eseguendo interventi su simboli, estrapolando informazioni matematiche da grafici e tabelle, rappresentando e manipolando le forme nello spazio e analizzando i dati). Lavorano su un modello della situazione problematica, stabiliscono delle regolarità, identificano collegamenti tra le entità matematiche e creano argomentazioni matematiche. Nello specifico, questo processo di utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici comprende attività quali:

- elaborazione e attuazione di strategie per trovare soluzioni matematiche;
- utilizzo di strumenti matematici, tecnologia compresa, che possano essere utili per trovare soluzioni esatte o approssimate;
- applicazione di fatti, regole, strutture e algoritmi matematici nel cercare una soluzione;
- manipolazione di numeri, informazioni e dati grafici e statistici, espressioni ed equazioni algebriche e rappresentazioni geometriche;
- creazione di diagrammi, grafici e costruzioni matematiche da cui estrarre informazioni utili;
- utilizzo di diverse rappresentazioni, e passaggio da una all'altra, durante il processo per arrivare alla soluzione;
- esecuzione di generalizzazioni sulla base dei risultati dell'applicazione di procedimenti matematici per giungere alla soluzione; e
- riflessione sulle argomentazioni matematiche con spiegazione e giustificazione dei risultati matematici.

La prova rilasciata 'Andatura' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) è un esempio di prova basata in larga misura sulle capacità degli studenti di utilizzare concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici. Entrambi gli item di questa unità si basano sull'utilizzo di un dato modello – una formula – per determinare l'ampiezza del passo (item1) o la velocità di cammino (item2). I due quesiti sono stati formulati in modo tale da possedere già una struttura matematica e agli studenti si chiede quindi di eseguire interventi sui simboli e calcoli di natura algebrica per poter giungere alla soluzione. Analogamente, l'item PISA 'Carpentiere' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) è basato in larga misura sulle capacità degli studenti di utilizzare concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici. La principale sfida cognitiva consiste, in questo caso, nel mettere a punto una strategia per trovare informazioni sulla lunghezza totale di segmenti lineari di lunghezza sconosciuta e di ragionare sul raffronto delle lunghezze. Gli studenti devono altresì mettere in



relazione le figure ai giardini e i perimetri alla quantità totale di legname a disposizione, ma questo processo di formulazione è decisamente meno impegnativo del processo di ragionamento sulle lunghezze dei perimetri.

Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici.

Il termine interpretare ai sensi della definizione di literacy matematica si riferisce alle capacità degli studenti di riflettere su soluzioni, risultati o conclusioni matematiche e di interpretarle nel contesto di problemi reali. Prevede la traslazione di soluzioni o ragionamenti matematici riportandoli nel contesto del problema per comprendere se i risultati siano plausibili e sensati nella situazione data. Questa categoria di processi matematici comprende le frecce "interpretare" e "valutare" nel modello di l'applicazione pratica del modello di literacy matematica definito in precedenza (vedi figura 1.1). Gli studenti impegnati in questo processo saranno sollecitati a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema, riflettendo sia sul processo di modellizzazione sia sui risultati ottenuti. Nello specifico, questo processo di interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici comprende attività quali:

- interpretazione di un risultato matematico riportato nel contesto reale;
- valutazione della plausibilità di una soluzione matematica nel contesto di un problema reale;
- comprensione del modo in cui il mondo reale influisce sui risultati e sui calcoli di un procedimento o modello matematico al fine di formulare giudizi contestuali su come dovrebbero essere corretti o applicati i risultati;
- spiegazione del perché un risultato o una conclusione matematica abbia, o non abbia, senso nel contesto specifico di un dato problema;
- comprensione della portata e dei limiti dei concetti e delle soluzioni matematiche; e
- critica e individuazione dei limiti del modello utilizzato per risolvere il problema.

La prova 'Rifiuti' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) concerne principalmente le capacità degli studenti di interpretare, applicare e valutare risultati matematici. La prova è basata sostanzialmente sulla valutazione dell'efficacia del risultato matematico (nel caso specifico, un grafico a barre immaginato o schizzato su un foglio) nel descrivere i dati presentati all'interno della prova sul tempo di decomposizione di diverse tipologie di rifiuti. Il quesito comporta un ragionamento sui dati presentati, l'elaborazione di un pensiero in forma matematica sulla relazione esistente tra i dati e la relativa presentazione, e una rilevazione dei risultati. Chi risolve il problema deve fornire una spiegazione del perché quel grafico a barre non sia adatto a rappresentare i dati forniti.

Capacità matematiche fondamentali soggiacenti ai processi matematici

Dieci anni di esperienza nello sviluppo degli item PISA e nell'analizzare come gli studenti rispondono a tali item hanno dimostrato che esiste un insieme di capacità matematiche fondamentali che stanno alla base di ciascuno dei processi riferiti e dell'applicazione pratica della literacy matematica. Il lavoro di Mogens Niss e dei suoi colleghi danesi (Niss, 2003; Niss and Jensen, 2002; Niss and Højgaard, 2011) ha evidenziato otto capacità, definite "competenze" da Niss nel quadro di riferimento del 2003 (OCSE, 2003), strumentali al comportamento matematico. Il quadro di riferimento 2012 utilizza una formulazione modificata di questa serie di capacità, riducendone il numero da otto a sette sulla base delle analisi del MEG relative all'utilizzo di tali competenze attraverso item PISA somministrati in precedenza (Turner et al., 2013). È ampiamente riconosciuta la necessità di identificare tale serie di capacità matematiche generali per meglio mettere in luce l'apprendimento di contenuti matematici specifici. Tra gli esempi più significativi citiamo le otto prassi matematiche dei Common Core State Standards degli Stati Uniti (2010), i quattro processi matematici fondamentali (rappresentazione, analisi, interpretazione e valutazione e comunicazione e riflessione) dell'England's Mathematics National Curriculum (Qualifications and Curriculum Authority, 2007) e i processi di base del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, 2000). Queste capacità cognitive fanno parte del bagaglio dei singoli o possono essere apprese al fine di comprendere e affrontare il mondo in modo matematico o di risolvere problemi. Quando il livello di literacy matematica di uno studente migliora, questi sarà in grado di fare affidamento in misura sempre maggiore sulle capacità matematiche fondamentali. Pertanto, una maggiore attivazione delle capacità matematiche fondamentali va di pari passo con l'aumento della difficoltà degli item. Questa considerazione è stata utilizzata quale base per le descrizioni dei diversi livelli di literacy matematica nei precedenti cicli PISA e sarà discussa più avanti.

Le sette capacità matematiche fondamentali utilizzate nel presente quadro di riferimento sono le seguenti:

- **Comunicazione:** la literacy matematica richiede comunicazione. Lo studente percepisce l'esistenza di una sfida ed è stimolato a riconoscere e comprendere una situazione problematica. La lettura, la decodifica e l'interpretazione di affermazioni, domande, compiti o oggetti permettono allo studente di costruirsi un modello mentale della situazione e questo rappresenta un passaggio fondamentale per la comprensione, chiarificazione e formulazione di un problema.



Durante il processo di risoluzione, potrebbe presentarsi la necessità di riassumere e presentare i risultati intermedi. Successivamente, una volta trovata la soluzione, la persona che ha risolto il problema potrebbe dover presentare la soluzione fornendo una spiegazione o una giustificazione.

- **Matematizzazione:** la literacy matematica può prevedere la trasformazione di un problema definito nel mondo reale in una forma strettamente matematica (che può includere strutturazione, concettualizzazione, formulazione di ipotesi e/o creazione di un modello) o l'interpretazione o valutazione di un risultato o un modello matematico in funzione del problema iniziale. Il termine matematizzazione viene utilizzato per descrivere le attività matematiche fondamentali messe in gioco.
- **Rappresentazione:** molto spesso, la literacy matematica implica rappresentazioni di oggetti e situazioni di natura matematica. Questo può consistere nel selezionare, interpretare, traslare e utilizzare diverse rappresentazioni per riuscire a farsi un'idea della situazione, a interagire con il problema o a presentare il proprio lavoro. Il termine rappresentazione può fare riferimento a grafici, tabelle, diagrammi, figure, equazioni, formule e materiali tangibili.
- **Ragionamento e argomentazione:** una delle abilità matematiche richieste nei vari passaggi e nelle attività connesse alla literacy matematica è denominata ragionamento e argomentazione. Questa competenza implica processi mentali basati sulla logica che permettono di analizzare e collegare gli elementi di un problema in modo tale da poterne trarre delle conclusioni, verificare una giustificazione data o fornire una giustificazione per affermazioni o soluzioni al problema.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** la literacy matematica richiede spesso di elaborare strategie per risolvere i problemi in forma matematica. E questo implica una serie di processi di controllo critico che orientano lo studente nel riconoscere, formulare e risolvere i problemi in maniera efficace. Tale competenza permette agli studenti di selezionare o elaborare un piano o una strategia per utilizzare la matematica nella risoluzione dei problemi posti in un compito e/o inseriti in un contesto e di metterli in atto. Questa capacità matematica può essere richiesta in qualsiasi passaggio del processo di risoluzione del problema.
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni:** la literacy matematica richiede l'utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni. Questo consiste nel comprendere, interpretare, manipolare e utilizzare espressioni simboliche in un contesto matematico (incluse espressioni e operazioni aritmetiche) retto da regole e convenzioni matematiche. Implica inoltre la comprensione e l'utilizzo di costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali, nonché l'utilizzo di algoritmi con tali entità. I simboli, le regole e i sistemi utilizzati varieranno in funzione dei contenuti matematici specifici necessari per un dato compito al fine di formulare, risolvere o interpretare gli aspetti matematici.
- **Utilizzo di strumenti matematici:** l'ultima competenza matematica che sottende all'utilizzo pratico della literacy matematica è l'utilizzo di strumenti matematici. Gli strumenti matematici comprendono strumenti fisici, come ad es. gli strumenti di misurazione, ma anche calcolatrici e strumenti informatici oggi sempre più disponibili. Questa abilità implica la conoscenza e la capacità di utilizzo di determinati strumenti di supporto all'attività matematica nonché la consapevolezza delle limitazioni di tali strumenti. Gli strumenti matematici possono altresì rivestire un ruolo importante nella comunicazione dei risultati. Nelle precedenti indagini PISA l'uso di simili strumenti durante le prove scritte era ammesso solo in misura assai ridotta. La componente informatizzata opzionale della rilevazione PISA 2012 per la matematica offrirà agli studenti maggiori opportunità di utilizzare strumenti matematici e permetterà di inserire osservazioni sul modo in cui tali strumenti vengono utilizzati durante la prova.

Tali capacità intervengono a vari livelli di ciascuno dei tre processi matematici usati per la presentazione dei risultati. La figura 1.2 riassume il modo in cui tali competenze si esplicano all'interno dei processi. La sezione "Capacità matematiche fondamentali e loro relazione con la difficoltà degli item", in calce al presente capitolo, descrive tali competenze in modo più dettagliato, insistendo in particolare sulla loro relazione con la difficoltà degli item. Inoltre, tutti gli esempi forniti nella sezione "Item PISA - esempi" descrivono in che modo gli studenti possono attivare le competenze per risolvere un determinato problema.

Conoscenza dei contenuti matematici

La conoscenza dei contenuti matematici (e la capacità di applicare tale conoscenza alla risoluzione di problemi contestualizzati) è importante per essere cittadini nella società moderna. Si tratta di saper fare appello a conoscenze matematiche per poter risolvere problemi o interpretare situazioni in diversi contesti personali, professionali, sociali e scientifici.

Le strutture matematiche sono state sviluppate nel tempo proprio quale strumento per comprendere e interpretare fenomeni naturali e sociali. A scuola, i programmi di matematica sono generalmente organizzati in branche (per es. aritmetica, algebra e geometria) con una ripartizione che riflette gli ambiti di suddivisione storica della matematica e che aiuta a definire un programma ben strutturato. Ma nella realtà extra-scolastica, una sfida o una situazione, quando si presenta, non è quasi mai

• Figura 1.2 •

Relazione tra processi matematici (prima riga in alto) e capacità matematiche fondamentali (prima colonna a sinistra)

	Formulazione di situazioni in forma matematica	Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici	Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici
Comunicazione	Leggere, decodificare e interpretare affermazioni, domande, compiti, oggetti, immagini o animazioni (nella rilevazione computerizzata) al fine di creare un modello mentale della situazione	Articolare una soluzione, illustrare il lavoro necessario per arrivare alla soluzione e/o riassumere e presentare i risultati matematici intermedi	Elaborare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema
Matematizzazione	Identificare le variabili e le strutture matematiche soggiacenti al problema reale e formulare delle ipotesi per poterle utilizzare	Utilizzare la comprensione del contesto per orientare o organizzare il processo matematico di risoluzione, ad es. lavorare con un livello di precisione adeguato al contesto	Comprendere la portata e i limiti di una soluzione matematica derivanti dall'impiego di un determinato modello matematico
Rappresentazione	Creare una rappresentazione matematica delle informazioni del mondo reale	Dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema	Interpretare i risultati matematici in diversi formati in relazione alla situazione o all'utilizzo; confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione a una situazione
Ragionamento e argomentazione	Spiegare, difendere o giustificare la rappresentazione della situazione reale elaborata o individuata	Spiegare, difendere o giustificare il processo e i procedimenti usati per determinare un risultato o una soluzione di natura matematica Collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica, elaborare generalizzazioni o creare argomentazioni a più livelli	Riflettere sulle soluzioni matematiche ed elaborare spiegazioni e argomentazioni che supportino, confutino o qualifichino una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi	Selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica	Attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta a una soluzione, conclusione o generalizzazione matematica	Elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni	Utilizzare variabili, simboli, diagrammi e modelli standard adeguati al fine di rappresentare un problema reale attraverso un linguaggio simbolico/formale	Comprendere e utilizzare costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali; utilizzare algoritmi	Comprendere la relazione esistente tra il contesto del problema e la rappresentazione della soluzione matematica. Usare tale comprensione per orientare l'interpretazione della soluzione nel contesto e determinarne la plausibilità e le possibili limitazioni
Utilizzo di strumenti matematici	Usare strumenti matematici per riconoscere le strutture matematiche o per delineare relazioni matematiche	Conoscere e saper utilizzare adeguatamente i diversi strumenti che possono essere utili durante i processi e i procedimenti finalizzati alla ricerca delle soluzioni	Usare strumenti matematici per accertare la plausibilità di una soluzione matematica ed eventuali sue limitazioni e restrizioni in base al contesto del problema



accompagnata da un insieme di regole e prescrizioni che indicano come affrontarla. Richiede piuttosto una certa dose di pensiero creativo per intravedere le possibilità di inserire la matematica nella situazione e di formularla in modo matematico. Spesso una situazione può essere affrontata in modi diversi, facendo ricorso a concetti, procedimenti, fatti o strumenti matematici diversi.

L'obiettivo di PISA è di valutare la literacy matematica e, a questo proposito, si propone una struttura organizzativa per la conoscenza della matematica basata sui fenomeni matematici che stanno alla base di ampie classi di problemi e che hanno motivato lo sviluppo di concetti e procedimenti matematici specifici. Ad esempio, fenomeni matematici come l'incertezza e il cambiamento sottendono a numerose situazioni che si verificano di frequente e sono stati dunque sviluppati strategie e strumenti matematici per analizzare tali situazioni. Una simile organizzazione dei contenuti non rappresenta una novità, come illustrato da due note pubblicazioni: *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990) e *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994).

Essendo i curricoli di matematica a livello nazionale generalmente pensati per fornire agli studenti le conoscenze e le competenze necessarie per affrontare gli stessi fenomeni matematici soggiacenti, il ventaglio di contenuti che emerge da una simile organizzazione è molto vicino alla struttura dei programmi di matematica definiti a livello nazionale. Per orientare chi svilupperà gli item, questo quadro di riferimento presenta un elenco con alcuni argomenti adatti alla rilevazione della literacy matematica degli studenti di 15 anni, sulla base dell'analisi di standard nazionali vigenti in undici paesi.²

Per organizzare l'ambito della matematica al fine di valutare la literacy matematica, è importante selezionare una struttura che nasca dall'evoluzione storica della matematica, che sia sufficientemente varia e approfondita da rivelare l'essenza della matematica e che rappresenti, o comprenda, in modo accettabile le branche tradizionali della matematica. Sotto il profilo storico, con l'invenzione della geometria analitica e del calcolo analitico nel XVII secolo, la matematica si è trasformata nello studio integrato di numeri, forme, variazioni e relazioni; l'analisi di fenomeni quali l'aleatorietà e l'indeterminazione è diventata strumentale alla risoluzione dei problemi nel XIX e XX secolo. È su queste basi che è stato selezionato, per il quadro di riferimento 2012, un gruppo di categorie di contenuto tale da riflettere la molteplicità dei fenomeni matematici soggiacenti e da essere coerente con le categorie utilizzate nelle indagini PISA precedenti.

L'elenco delle categorie di contenuto presentato di seguito viene dunque utilizzato in PISA 2012 nel rispetto dell'evoluzione storica, per coprire adeguatamente l'ambito della matematica e i fenomeni soggiacenti che ne hanno motivato lo sviluppo e riflettere le grandi branche dei programmi scolastici. Queste quattro categorie descrivono il contenuto matematico fondamentale della disciplina e illustrano le ampie aree di contenuto che orientano lo sviluppo degli item per il ciclo 2012:

- Cambiamento e relazioni;
- Spazio e forma;
- Quantità;
- Incertezza e dati.³

Queste quattro categorie permettono di organizzare l'ambito della matematica in modo tale da garantire una ripartizione degli item in tutto l'ambito e sono incentrate su fenomeni matematici importanti, ma al tempo stesso evitano una suddivisione troppo dettagliata che andrebbe contro la volontà di proporre problemi ricchi e stimolanti basati su situazioni reali. Una classificazione basata sul contenuto è importante per lo sviluppo e la selezione degli item e per elaborare un rapporto sui risultati della rilevazione, ma è bene sottolineare che alcuni contenuti specifici potrebbero essere inseriti in più di una categoria. Ad esempio, l'item della prova denominata "Pizze" chiede di determinare quale delle due pizze rotonde, di diametro e costo diverso ma dello stesso spessore, offra il maggior vantaggio economico (si rimanda alla sezione "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo per una descrizione degli item della prova e dei relativi attributi).

²Sono stati analizzati gli standard per due insiemi di paesi. Da una parte, nove paesi OCSE (Australia [Nuovo Galles del Sud], Belgio [Fiandre], Canada [Alberta], Finlandia, Irlanda, Giappone, Corea, Nuova Zelanda, Regno Unito] e d'altra parte sei paesi ad alte prestazioni (Belgio [Fiandre], Canada [Alberta], Cina - Taipei, Finlandia, Corea, Singapore). Un limite dell'analisi è che gli standard dovevano essere disponibili in inglese.

³Chi già conosce i quadri di riferimento precedenti noterà che la categoria Incertezza prende ora il nome di Incertezza e dati. Tale modifica è volta a descrivere la categoria con maggiore chiarezza ma non implica alcun cambiamento profondo della categoria in questione.



Questa prova attinge a diverse branche della matematica, tra cui la misurazione, la quantificazione (prezzo più conveniente, ragionamento proporzionale e calcoli aritmetici) e il cambiamento e relazioni (in termini di relazioni tra le variabili e variazioni delle proprietà tra pizza più piccola e quella più grande). L'item è stato classificato come appartenente alla categoria Cambiamento e relazioni poiché l'elemento fondamentale per la risoluzione del problema risiede nella capacità dello studente di mettere in relazione la differenza di dimensione delle due pizze (la variazione di diametro) e la corrispondente differenza di prezzo. Ovviamente, un altro item riguardante l'area del cerchio avrebbe potuto essere inserito nella categoria Spazio e forma. I collegamenti tra gli aspetti di contenuto che attraversano queste quattro categorie contribuiscono alla coerenza della matematica in quanto disciplina e sono evidenti in alcuni degli item selezionati per la rilevazione PISA 2012.

Le ampie categorie di contenuto matematico e gli argomenti più specifici maggiormente adatti a studenti di 15 anni descritti di seguito riflettono il livello e la portata dei contenuti che possono essere inseriti nel ciclo 2012. Sono fornite in primo luogo le descrizioni narrative di ciascuna categoria di contenuto e ne viene illustrata la rilevanza per la risoluzione di problemi; successivamente vengono presentate definizioni più specifiche del tipo di contenuto giudicato idoneo all'inserimento nella rilevazione della literacy matematica degli studenti di 15 anni. Queste tematiche specifiche riflettono elementi comuni, reperibili nelle aspettative di numerosi paesi e sistemi scolastici. Gli standard esaminati per giungere all'identificazione di queste tematiche sono considerati non solo come prova di ciò che è stato insegnato in ambito matematico in questi paesi, ma anche come indicatori delle conoscenze e delle competenze che tali paesi reputano importante trasmettere agli studenti di quell'età per prepararli a diventare cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.

Di seguito sono riportate le descrizioni dei contenuti matematici che contraddistinguono ciascuna delle quattro categorie: Cambiamento e relazioni, Spazio e forma, Quantità e Incertezza e dati.

Cambiamento e relazioni

Il mondo naturale e il mondo creato dall'uomo mostrano una moltitudine di relazioni temporanee e permanenti tra gli oggetti e le circostanze, dove i cambiamenti avvengono all'interno di sistemi di oggetti correlati o in circostanze nelle quali gli elementi si influenzano a vicenda. In molti casi, questi cambiamenti avvengono nella dimensione temporale, mentre in altri i cambiamenti che avvengono in relazione a un oggetto o a una quantità possono essere correlati a cambiamenti relativi a un altro oggetto o quantità. In alcune circostanze si tratta di cambiamenti discreti, in altre si tratta invece di cambiamenti continui. Alcune relazioni sono di natura permanente, o invariante. Per comprendere meglio l'aspetto cambiamento e relazioni è necessario in primo luogo comprendere le tipologie fondamentali del cambiamento e riconoscerle quando si manifestano per poter utilizzare i modelli matematici adeguati a descrivere e predire il cambiamento. In termini matematici, questo significa modellizzare il cambiamento e le relazioni con funzioni ed equazioni adeguate, nonché elaborare, interpretare e tradurre rappresentazioni grafiche e simboliche delle relazioni.

La categoria Cambiamento e relazioni è rilevabile in contesti molto diversi, ad esempio la crescita degli organismi, la musica, il ciclo delle stagioni, gli andamenti meteorologici, i tassi di occupazione e le condizioni economiche. Alcuni aspetti matematici tradizionali delle funzioni e dell'algebra, tra cui le espressioni algebriche, le equazioni e le disequazioni e le rappresentazioni sotto forma di grafico o tabella, sono fondamentali per descrivere, modellizzare e interpretare i fenomeni di cambiamento. Ad esempio, l'unità 'Andatura' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) contiene due item esemplificativi della categoria Cambiamento e relazioni poiché si basa su relazioni algebriche tra due variabili e chiede agli studenti di attivare le proprie conoscenze e competenze algebriche. Gli studenti devono utilizzare una data formula della lunghezza del passo (espressa in forma algebrica) per determinare tale lunghezza in un item e la velocità di cammino nell'altro. Spesso per descrivere e interpretare il cambiamento e le relazioni si utilizzano anche rappresentazioni dei dati e delle relazioni in forma statistica, e una buona padronanza di base dei numeri e delle unità risulta essenziale per descrivere e interpretare l'aspetto cambiamento e relazioni. Alcune interessanti relazioni emergono dalle misurazioni geometriche, come ad esempio il modo in cui i cambiamenti del perimetro in una famiglia di forme possano essere collegati a cambiamenti della superficie, o ancora le relazioni tra la lunghezza dei lati dei triangoli. Il primo item PISA proposto (si rimanda "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) illustra la categoria Cambiamento e relazioni.

La somministrazione informatizzata opzionale delle prove di matematica prevista per il ciclo 2012 consente di presentare agli studenti immagini dinamiche e rappresentazioni multiple dinamicamente collegate e offrire loro l'opportunità di manipolare le funzioni. È così che il cambiamento temporale (p. es. la crescita o il movimento) può essere descritto in modo diretto con animazioni e simulazioni e rappresentato con funzioni, grafici e tabelle di dati collegati. Il processo di ricerca e utilizzo di modelli matematici del cambiamento viene valorizzato quando lo studente ha la possibilità di esplorare e descrivere il cambiamento utilizzando un software che gli permetta di disegnare funzioni, manipolare parametri, creare tabelle di dati, utilizzare relazioni geometriche, organizzare e tracciare i dati ed eseguire calcoli ricorrendo a formule. Le funzionalità dei fogli elettronici e delle applicazioni grafiche che permettono di lavorare con le formule e di rappresentare graficamente i dati rivestono un'importanza particolare.



Spazio e forma

Spazio e forma comprende un'ampia gamma di fenomeni che incontriamo ovunque nel nostro mondo visivo e fisico: schemi, proprietà, posizione e orientamento degli oggetti, loro rappresentazione, decodifica e codifica di informazioni visive, navigazione e interazione dinamica con forme reali e con rappresentazioni. La geometria costituisce un elemento fondamentale della categoria Spazio e forma che peraltro si estende al di là della geometria tradizionale in termini di contenuto, significato e metodo, integrando elementi di altre branche della matematica quali la visualizzazione spaziale, la misurazione e l'algebra. Le forme possono modificarsi, un punto può spostarsi nello spazio e questo richiede il ricorso a concetti di funzione. Le formule di misurazione sono fondamentali in quest'ambito. La manipolazione e l'interpretazione di forme contestualizzate che richiedono l'utilizzo di strumenti che vanno dai software di geometria dinamica ai GPS sono comprese in questa categoria.

PISA parte dal presupposto che la padronanza di una serie di concetti e competenze di base sia particolarmente importante per la literacy matematica relativa a Spazio e forma. La literacy matematica in quest'ambito implica un insieme di attività quali la comprensione della nozione di prospettiva (ad esempio nella pittura), la creazione e la lettura di mappe, la trasformazione delle forme con o senza l'ausilio della tecnologia, l'interpretazione di scene tridimensionali osservate da prospettive diverse e la costruzione di rappresentazioni di forme. L'item della prova PISA 'Carpentiere' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) appartiene alla categoria Spazio e forma perché tratta un altro dei suoi aspetti fondamentali: le proprietà delle forme. In questo item a scelta multipla complessa, gli studenti devono individuare quale o quali tra i quattro diversi modelli di aiuola proposti può o possono essere recintati con 32 metri di assi di legno. Questo item richiede l'applicazione di conoscenze geometriche e capacità di ragionamento. Agli studenti vengono fornite informazioni sufficienti per calcolare il perimetro esatto di tre modelli di aiuola; quelle relative al quarto modello sono invece inesatte e questo richiede capacità di ragionamento geometrico di tipo qualitativo.

La somministrazione computerizzata offre agli studenti l'opportunità di manipolare le rappresentazioni dinamiche delle forme e di analizzare le relazioni tra gli oggetti tridimensionali e all'interno degli stessi, permettendo loro di farli ruotare virtualmente per ricavarne un'immagine mentale precisa. Gli studenti possono lavorare con mappe nelle quali è possibile aumentare o diminuire lo zoom o eseguire rotazioni al fine di farsi un'immagine mentale di un luogo e utilizzare tali strumenti per pianificare un itinerario. Possono scegliere e utilizzare strumenti virtuali per eseguire misurazioni (di angoli, segmenti ecc.) su piani, immagini e modelli e utilizzare i dati ottenuti per l'esecuzione dei calcoli. La tecnologia permette agli studenti di coniugare la conoscenza della geometria con le informazioni visive, mettendoli in condizione di crearsi un modello mentale preciso. Per determinare il volume di una tazza potrebbero per esempio manipolare l'immagine per comprendere che si tratta di un tronco di cono, conoscerne l'altezza e il punto in cui misurarla e constatare che quelle che in un'immagine bidimensionale potrebbero sembrare delle ellissi, poste nella parte superiore e inferiore della tazza, sono in realtà cerchi nello spazio tridimensionale.

Quantità

Si può dire che la nozione di quantità è l'elemento matematico più diffuso ed essenziale per vivere e funzionare nel nostro mondo. Comprende la quantificazione di attributi di oggetti, relazioni, situazioni ed entità reali, la comprensione di varie modalità di rappresentazione di tali quantificazioni, e la capacità di giudicare interpretazioni e argomentazioni basate sulla quantità. Per procedere alla quantificazione del reale occorre comprendere misurazioni, conteggi, grandezze, unità, indicatori, dimensioni relative, tendenze e modelli numerici. Aspetti del ragionamento quantitativo – senso numerale, rappresentazioni multiple di numeri, eleganza nel calcolo, calcolo mentale, stima e valutazione della plausibilità dei risultati – sono essenziali per la literacy matematica relativa alla quantità.

La quantificazione, metodo basilare per descrivere e misurare un'ampia gamma di attributi o aspetti del mondo, permette la modellizzazione di situazioni per esaminare cambiamenti e relazioni, per descrivere e manipolare spazio e tempo, per organizzare e interpretare dati e per misurare e valutare l'incertezza. Per questo la literacy matematica relativa alla quantità applica la conoscenza dei numeri e delle operazioni in una grande varietà di situazioni. L'item di 'Concerto rock' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) illustra la categoria Quantità. L'item chiede agli studenti di stimare il numero totale di persone partecipanti a un concerto sulla base delle dimensioni del campo rettangolare in cui si svolge il concerto. Benché siano presenti elementi relativi alla categoria Spazio e forma, l'item richiede in primo luogo di ipotizzare un'area ragionevole occupata da ciascuna persona e di utilizzare l'area totale disponibile per calcolare e stimare il numero di persone presenti. In alternativa, trattandosi di una prova a scelta multipla, gli studenti potrebbero procedere con un ragionamento inverso utilizzando l'area del campo e ciascuna delle opzioni di risposta per calcolare lo spazio corrispondente a una persona, determinando a quale opzione corrisponde il risultato più verosimile. Dato che le opzioni di risposta sono proposte in termini di migliaia (p. es. 2000, 5000) questo item fa appello anche alle capacità di stima numerica degli studenti.



La somministrazione informatizzata offre agli studenti la possibilità di approfittare dell'enorme potere di calcolo della tecnologia moderna. È importante notare che se la tecnologia può esimere lo studente dal peso del calcolo e liberare altre risorse cognitive affinché possa concentrarsi sul significato e sulla strategia di risoluzione del problema, la necessità che possieda una profonda comprensione della matematica rimane invariata ai fini della literacy matematica. Una persona priva di tale comprensione può utilizzare la tecnologia al massimo per operazioni di routine che non rientrano nella definizione di literacy matematica di PISA 2012. L'integrazione della tecnologia nel quadro della rilevazione computerizzata opzionale permette di includere prove che richiedono livelli di calcolo numerici e statistici impensabili nelle tradizionali prove scritte.

Incertezza e dati

Nella scienza, nella tecnologia e nella vita reale l'incertezza è un dato di fatto. L'incertezza è dunque un fenomeno centrale nell'analisi matematica di numerose situazioni problematiche, ed è per tenerne conto che sono state create la teoria della probabilità, la statistica e varie tecniche di rappresentazione e descrizione dei dati. La categoria Incertezza e dati richiede: comprensione del ruolo della variazione nei processi, senso della quantificazione di quella variazione, riconoscimento dell'incertezza e dell'errore nella misurazione, e consapevolezza della casualità. Richiede inoltre l'elaborazione, interpretazione e valutazione di conclusioni tratte in situazioni nelle quali l'incertezza è centrale. La presentazione e interpretazione dei dati sono concetti fondamentali per questa categoria (Moore, 1997).

L'incertezza è presente, tra l'altro, nei pronostici scientifici, nei sondaggi, nelle previsioni del tempo e nei modelli economici. La variazione è presente tra l'altro nei processi di fabbricazione, nei punteggi dei test, nei risultati dei sondaggi, mentre la casualità è fondamentale in molte attività ricreative alle quali ci dedichiamo. Le tradizionali aree curriculari relative di probabilità e statistica offrono un mezzo formale per descrivere, modellare e interpretare una certa classe di fenomeni di incertezza, o per fare delle supposizioni. Inoltre, la conoscenza dei numeri e di elementi di algebra, grafici e rappresentazioni simboliche contribuisce a favorire la soluzione dei problemi in questa categoria di contenuto. L'item dalla prova 'Rifiuti' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) illustra la categoria Incertezza e dati. La prova chiede agli studenti di esaminare i dati presentati in una tabella e spiegare perché un grafico a barre non è adatto a visualizzare tali dati. L'attenzione riservata alla presentazione e interpretazione dei dati è un aspetto importante della categoria Incertezza e dati.

La somministrazione computerizzata permette agli studenti di lavorare con insiemi di dati di dimensioni maggiori e garantisce il potere del calcolo e le capacità di gestione dei dati necessari per elaborare tali insiemi. Agli studenti viene data l'opportunità di scegliere gli strumenti appropriati per manipolare, analizzare e rappresentare i dati, e di estrapolare campioni. Le relative rappresentazioni permettono di esaminare e descrivere tali dati in modo diversi. La capacità di generare esiti a caso, anche numerici, permette di esplorare situazioni probabilistiche a mezzo di simulazioni; per esempio la probabilità empirica di eventi e le proprietà dei campioni.

Tematiche adatte alla rilevazione della literacy matematica degli studenti di 15 anni

La reale comprensione e risoluzione di problemi contestualizzati nelle categorie Cambiamento e relazioni, Spazio e forma, Quantità e Incertezza e dati richiede il ricorso a una molteplicità di concetti, procedure, fatti e strumenti matematici e un adeguato livello di approfondimento e sofisticazione. PISA cerca di capire quali siano i livelli e i tipi di matematica appropriati per la rilevazione della literacy matematica di studenti quindicenni che diverranno cittadini che riflettono, che si impegnano, che esercitano un ruolo costruttivo, e capaci di formulare giudizi fondati e prendere decisioni attendibili. Tra l'altro l'indagine, pur non essendo pensata o intesa come rilevazione basata sui curricoli, cerca di riflettere le capacità matematiche che gli studenti possono avere verosimilmente assimilato all'età di 15 anni.

Nell'ottica di mettere a punto una rilevazione che sia 'preveggente' ma che rifletta anche le capacità matematiche che gli studenti possono avere verosimilmente appreso all'età di 15 anni, sono stati analizzati campioni di standard matematici di undici paesi per determinare sia cosa viene loro insegnato nelle scuole del mondo, sia che cosa i diversi paesi considerano realistico e importante come preparazione degli studenti al momento di avvicinarsi al mercato del lavoro o di proseguire gli studi a livello superiore. Sulla base degli aspetti comuni identificati in queste analisi, nonché del giudizio degli esperti di matematica, viene di seguito descritto il contenuto ritenuto appropriato per rientrare nella rilevazione della literacy matematica per il ciclo 2012.

Le quattro categorie di contenuto Cambiamento e relazioni, Spazio e forma, Quantità e Incertezza e dati sono il fondamento per l'identificazione di questa gamma di contenuti, tuttavia non vi è una mappatura one-to-one di tutte le tematiche di contenuto di queste categorie. Per esempio, la capacità di ragionamento proporzionale è chiamata in causa nei contesti più vari, tra cui conversioni di misura, analisi delle relazioni lineari, calcolo delle probabilità e verifica della lunghezza dei lati in forme simili. Il contenuto illustrato di seguito intende riflettere l'appartenenza di molti di questi concetti a tutte e quattro



le categorie e rafforzare la coerenza della matematica in quanto disciplina. In questo senso vuol essere un'illustrazione delle tematiche contenute nel ciclo 2012 piuttosto che un elenco esaustivo:

- Funzioni: il concetto di funzione, in particolare le funzioni lineari ma non solo, le loro proprietà, e svariate loro descrizioni e rappresentazioni. Le rappresentazioni più comuni sono verbali, simboliche, tabulari e grafiche.
- Espressioni algebriche: interpretazione verbale e manipolazione di espressioni algebriche, che comprendono numeri, simboli, operazioni aritmetiche, potenze e radici semplici.
- Equazioni e disuguaglianze: equazioni lineari e disuguaglianze, semplici equazioni di secondo grado, e metodi di soluzione analitici e non analitici.
- Sistemi di coordinate: rappresentazione e descrizione di dati, posizioni e relazioni.
- Relazioni di e tra oggetti geometrici bi e tridimensionali: relazioni statiche quali collegamenti algebrici tra elementi di figure (p. es. il teorema di Pitagora in quanto definizione della relazione tra le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo), posizione relativa, similitudine e congruenza, e relazioni dinamiche che implicano la trasformazione e il movimento di oggetti, nonché le corrispondenze tra oggetti bi e tridimensionali.
- Misurazione: quantificazione di caratteristiche di e tra forme e oggetti, p. es. misurazione di angoli, distanza, lunghezza, perimetro, circonferenza, area e volume.
- Numeri e unità: concetti, rappresentazioni di numeri e sistemi numerici, incluse le proprietà dei numeri interi e razionali, aspetti rilevanti dei numeri irrazionali, nonché quantità e unità relative a elementi quali tempo, denaro, peso, temperatura, distanza, area e volume, quantità derivate e loro descrizione numerica.
- Operazioni aritmetiche: natura e proprietà di tali operazioni e relative convenzioni di notazione.
- Percentuali, rapporti e proporzioni: descrizione numerica di ordine di grandezza relativo e applicazione di proporzioni e del ragionamento proporzionale alla soluzione di problemi.
- Principi del contare: semplici combinazioni e permutazioni.
- Stime: approssimazioni a fini specifici di quantità ed espressioni numeriche, inclusi cifre significative e arrotondamento.
- Raccolta, rappresentazione e interpretazione di dati: natura, genesi e raccolta di diversi tipi di dati e i diversi modi di rappresentarli e interpretarli.
- Variabilità dei dati e sua descrizione: concetti quali variabilità, distribuzione e media di insiemi di dati, e come descriverli e interpretarli in termini quantitativi.
- Campioni e campionatura: concetti di campione e campionatura da gruppi di dati, incluse semplici deduzioni sulla base delle proprietà dei dati del campione.
- Casualità e probabilità: nozione di eventi casuali, variazione casuale e sua rappresentazione, casualità e frequenza degli eventi, e aspetti basilari del concetto di probabilità.

Contesti

Un aspetto importante della literacy matematica è che la matematica serve a risolvere problemi situati in un contesto. Il contesto è l'aspetto del mondo reale di una persona in cui si situa il problema. La scelta di appropriate strategie e rappresentazioni matematiche spesso dipende dal contesto in cui insorge il problema. In genere è riconosciuto che saper lavorare in un dato contesto possa rappresentare un carico supplementare per chi deve risolvere un problema (vedi Watson & Callingham, 2003, per quanto riguarda le statistiche). Ai fini dell'indagine PISA, è importante utilizzare molteplici contesti perché questo offre possibilità di connettere la più ampia gamma possibile di interessi individuali con molte delle situazioni normalmente vissute dai cittadini nel XXI secolo.

Per il quadro di riferimento 2012 per la matematica sono state definite quattro categorie di contesti, utilizzate per classificare le prove di rilevazione messe a punto per l'indagine:

- Personale – I problemi classificati nella categoria di contesto personale riguardano la persona stessa, la famiglia o un gruppo di pari. Tra i contesti che si possono considerare personali possiamo includere (ma senza limitazione) quelli relativi alla preparazione di cibo, lo shopping, i giochi, la salute personale, il trasporto personale, gli sport, i viaggi, l'agenda e le finanze personali. L'item 'Pizze' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) rientra nel contesto personale perché la domanda è quale pizza sia la più conveniente per l'acquirente da un punto di vista economico. Parimenti, la prova 'Andatura' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) contiene due item che riflettono un contesto personale. Il primo prevede l'applicazione di una formula matematica per determinare la lunghezza del passo di una persona, mentre il secondo prevede l'applicazione della stessa formula per determinare la velocità con

cui cammina un'altra persona.

- **Occupazionale** – I problemi classificati nella categoria di contesto occupazionale riguardano il mondo del lavoro. Tra i contesti che si possono considerare occupazionali possiamo includere (ma senza limitazione) elementi quali la misurazione, la valutazione del costo e l'ordinazione di materiali da costruzione, libro paga/contabilità, controllo della qualità, pianificazione/inventario, design/architettura e processi decisionali professionali. I contesti occupazionali possono riguardare qualsiasi livello della forza lavoro, dalla manovalanza ai massimi livelli professionali, tenendo comunque conto che devono essere accessibili a studenti di 15 anni. L'item dalla prova 'Carpentiere' (si rimanda a "Item PISA esemplificativi" in calce al presente capitolo) è ritenuto occupazionale perché riguarda un carpentiere che deve costruire un recinto attorno a un'aiuola. Anche l'item dalla prova 'Pizza' già menzionata, nel presentare la situazione dal punto di vista del venditore piuttosto che dell'acquirente potrebbe essere inquadrato in questa categoria.
- **Sociale** – I problemi classificati nella categoria sociale riguardano la comunità cui appartiene un individuo (sia essa locale, nazionale o globale). Può comprendere (ma senza limitazione) elementi quali sistemi elettorali, trasporti pubblici, governi, politiche pubbliche, demografia, pubblicità, statistiche ed economie nazionali. Benché un individuo sia coinvolto in tutti questi elementi in modo personale, la categoria sociale considera i problemi dal punto di vista della comunità. L'item dalla prova 'Concerto rock' (si rimanda a "Item PISA esemplificativi" in calce al presente capitolo) costituisce un esempio di item della categoria sociale perché è impostato a livello dell'organizzazione del concerto, anche se riguarda l'esperienza personale di far parte di una folla.
- **Scientifica** – I problemi che rientrano in questa categoria riguardano l'applicazione della matematica al mondo naturale e temi e argomenti pertinenti alla scienza e alla tecnologia. Tra i contesti potremmo includere (ma senza limitazione) campi quali la meteorologia o il clima, l'ecologia, la medicina, la scienza spaziale, la genetica, le misurazioni e il mondo della matematica in sé. L'item dalla prova 'Rifiuti' (si rimanda a "Item PISA - esempi" in calce al presente capitolo) rientra nel contesto scientifico perché è incentrato su problematiche scientifiche relative all'ambiente, nella fattispecie a dati relativi al tempo di decomposizione. Gli item di carattere intramatematico, dove tutti gli elementi presenti appartengono al mondo della matematica, ricadono nella categoria di contesto scientifica.

Gli item PISA sono organizzati in prove (o unità) che condividono uno stesso materiale di stimolo. Capita quindi solitamente che tutti gli item di una data unità appartengano alla stessa categoria. Vi sono comunque eccezioni, p. es. il materiale di stimolo può richiedere di essere esaminato dal punto di vista personale in un item e dal punto di vista sociale in un altro. Se un item prevede solo costrutti matematici senza riferimento a elementi del contesto dell'unità in cui è collocato, viene attribuito alla categoria di contesto di quella unità. Nei rari casi di unità che comprendono solo costrutti matematici privi di riferimenti a contesti esterni, l'unità è attribuita alla categoria scientifica.

L'uso delle categorie di contesto fornisce una base per selezionare un mix di contesti facendo sì che la rilevazione rifletta un'ampia gamma di capacità matematiche, dall'utilizzo personale nella vita quotidiana ai quesiti scientifici posti dai problemi globali. È altresì importante che ciascuna categoria sia rappresentata da item che presentino una larga fascia di gradi di difficoltà. Dato che lo scopo principale di queste categorie è di stimolare gli studenti in un'ampia gamma di contesti problematici, ciascuna categoria dovrebbe contribuire sostanzialmente alla misurazione della literacy matematica. Il livello di difficoltà degli item di una data categoria di contesto non dovrebbe essere sistematicamente maggiore o inferiore rispetto a quello degli item di un'altra categoria.

Al momento di identificare i contesti da utilizzare, è indispensabile tenere presente che lo scopo della rilevazione è di misurare l'utilizzo delle conoscenze, processi e capacità matematiche acquisite dagli studenti quindicenni. Ne consegue che gli item sono selezionati alla luce della rilevanza che possono avere rispetto agli interessi e alla vita degli studenti e alle domande cui dovranno rispondere inserendosi nella società da cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo. I coordinatori nazionali dei paesi partecipanti all'indagine PISA sono coinvolti nel valutare gli item siano pertinenti in tal senso.

RILEVAZIONE DELLA LITERACY MATEMATICA

Questa sezione delinea l'approccio adottato per l'implementazione nel ciclo 2012 degli elementi del quadro di riferimento descritti nelle sezioni precedenti. Questo comprende la struttura della componente matematica dell'indagine, la presentazione dei livelli di competenza matematica, gli atteggiamenti da investigare in relazione alla competenza matematica, e le disposizioni per la somministrazione informatizzata facoltativa.

Struttura della rilevazione delle competenze matematiche nel ciclo PISA 2012

Conformemente alla definizione di literacy matematica, gli item presenti in tutti gli strumenti messi a punto nell'ambito dell'indagine 2012, si tratti di prova cartacea o di somministrazione computerizzata, sono collocati in un contesto. Gli item prevedono l'applicazione di concetti matematici importanti, conoscenze, comprensione e competenze (conoscenza del



contenuto matematico) a un livello appropriato per studenti quindicenni, come illustrato più sopra. Il quadro di riferimento orienta la struttura e il contenuto della rilevazione, ed è importante che gli strumenti, in formato cartaceo o computerizzato che siano, contengano una selezione di item tale da riflettere le componenti del quadro di riferimento per la literacy matematica in modo equilibrato.

Distribuzione desiderata dei punteggi secondo il processo matematico

Inoltre, gli item di la matematica del ciclo 2012 possono essere attribuiti a uno dei tre processi matematici. L'obiettivo è di arrivare a un equilibrio che presenti una ponderazione all'incirca equivalente tra i due processi che comportano il fare un collegamento tra il mondo reale e quello matematico e il processo che chiede agli studenti di dimostrare la capacità di lavorare su un problema formulato matematicamente.

Tabella 1.1

Distribuzione approssimativa del punteggio per categoria di processi nel ciclo PISA 2012

Categoria di processo	Punteggio percentuale
Formulazione di situazioni in forma matematica	Approssimativamente 25
Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici	Approssimativamente 50
Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici	Approssimativamente 25
TOTALE	100

È importante sottolineare che in ciascuna categoria di processo gli item dovrebbero rispecchiare la gamma completa delle difficoltà.

Distribuzione desiderata dei punteggi per categoria di contenuto

Gli item matematici in PISA sono selezionati per riflettere la conoscenza di contenuti matematici illustrati più sopra. Gli item selezionati per il ciclo 2012 sono ripartiti sulle quattro categorie di contenuto, come mostra la tabella 1.2. Al momento di mettere a punto le prove, l'obiettivo era di arrivare a una ripartizione il più possibile equilibrata dei punteggi, considerato che tutti i campi valutati sono importanti per essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.

Tabella 1.2

Distribuzione approssimativa del punteggio per categoria di contenuto nel ciclo PISA 2012

Categoria di contenuto	Punteggio percentuale
Cambiamento e relazioni	Approssimativamente 25
Spazio e forma	Approssimativamente 25
Quantità	Approssimativamente 25
Incertezza e dati	Approssimativamente 25
TOTALE	100

È importante sottolineare che, in ciascuna categoria di contenuto, gli item dovrebbero rispecchiare la gamma completa delle difficoltà.

Distribuzione desiderata dei punteggi per categoria di contesto

Nel ciclo PISA 2012, ciascun item rientra in una delle quattro categorie di contesto. Gli item selezionati per le prove di matematica del ciclo 2012 sono ripartiti su tutte queste categorie, come mostra la tabella 1.3. In questa distribuzione equilibrata, nessun contesto domina gli altri, e questo permette di somministrare agli studenti una varietà di item in contesti che corrispondono a molte situazioni incontrate o che possono incontrare nella vita reale.

Tabella 1.3

Distribuzione approssimativa del punteggio per categoria di contesto nel ciclo PISA 2012

Categoria di contesto	Punteggio percentuale
Personale	Approssimativamente 25
Occupazionale	Approssimativamente 25
Sociale	Approssimativamente 25
Scientifico	Approssimativamente 25
TOTALE	100



È importante sottolineare che, in ciascuna categoria di contesto, gli item dovrebbero rispecchiare la gamma completa delle difficoltà.

Gradi di difficoltà

L'indagine PISA 2012 per la matematica contempla gradi di difficoltà assai diversi fra loro, rispecchiando la gamma delle capacità che studenti di 15 anni possono avere. Si va da quesiti che possono essere difficili anche per gli studenti più abili a quesiti adatti agli studenti considerati meno abili in matematica. Da un punto di vista psicometrico, un'indagine pensata per valutare un specifico gruppo di individui è più efficace ed efficiente se la difficoltà dei quesiti corrisponde alle capacità dei soggetti valutati. Per di più, le scale di competenza così importanti nella presentazione dei risultati PISA possono includere dettagli utili per gli studenti se gli item a partire dai quali si desume la competenza coprono tutto lo spettro di competenza descritto. Le scale di competenza sono basate su livelli crescenti di attivazione delle capacità matematiche fondamentali, descritte in dettaglio alla sezione "Capacità matematiche fondamentali e la loro relazione con la difficoltà degli item". Dai precedenti cicli PISA è emerso che nel loro complesso queste capacità sono indicatori del carico cognitivo, e in quanto tali contribuiscono in gran misura alla difficoltà delle prove (Turner, 2012; Turner et al, 2013). In base alla descrizione dell'attivazione di queste capacità, dopo la prova su campo per il ciclo 2012 è stata messa a punto la scala di competenza PISA 2012. Questa scala consente una misurazione empirica del carico cognitivo richiesto da ciascun item.

Struttura degli strumenti di rilevazione

Le prove cartacee per il ciclo PISA 2012 contengono un totale di 270 minuti di materiale per la rilevazione della literacy matematica, suddiviso in nove cluster di item, ciascuno dei quali rappresenta 30 minuti di test. Di questi, tre cluster (pari a 90 minuti di test) sono composti di materiale di ancoraggio già utilizzato in precedenti cicli PISA, quattro cluster 'standard' (pari a 120 minuti di test) comprendono materiale nuovo di varia difficoltà, e due cluster 'facili' (pari a 60 minuti di test) comprendono materiale nuovo che presenta un grado ridotto di difficoltà.

Ciascun paese partecipante utilizza sette cluster: i tre composti di materiale di ancoraggio, due dei nuovi cluster 'standard', e gli altri due cluster 'standard' oppure i due cluster 'facili'. La disponibilità di cluster 'facili' e 'standard' consente una rilevazione più mirata per ciascun paese partecipante; in ogni caso gli item sono scalati in modo tale che il punteggio di un paese non sia pregiudicato dal fatto che scelga cluster 'facili' o 'standard'. I cluster sono inseriti in fascicoli secondo uno schema di rotazione, in modo tale che ciascun fascicolo contiene quattro cluster di materiale di matematica, lettura e scienze. Ogni studente riceve un fascicolo della durata totale di 120 minuti.

La prova computerizzata facoltativa (CBAM) contiene prove matematiche per un totale di 80 minuti. Il materiale è suddiviso in quattro cluster di item, ciascuno dei quali rappresenta 20 minuti di test. Questo materiale è organizzato in moduli da due cluster in uno schema di rotazione, assieme ad altro materiale destinato alla somministrazione computerizzata. Ogni studente completa un modulo, per una durata totale di 40 minuti di rilevazione.

Struttura delle prove di rilevazione della literacy matematica in PISA 2012

Per la prova cartacea di rilevazione della literacy matematica del ciclo 2012 si utilizzano tre formati di item: a risposta aperta articolata, a risposta aperta univoca e a scelta multipla. Per gli item a risposta aperta articolata lo studente deve fornire una risposta scritta un po' elaborata. Potrebbe trattarsi di illustrare i passaggi utilizzati o di spiegare il ragionamento seguito per trovare la soluzione. Per questi item la correzione, manuale, è effettuata da esperti appositamente formati. Gli item a risposta aperta univoca forniscono un quadro più strutturato per la presentazione della soluzione del problema, dando adito a una risposta che può essere facilmente identificata come corretta o non corretta. Spesso le risposte a queste domande possono essere digitate in un software per la cattura dei dati e codificate automaticamente, ma in taluni casi richiedono la codifica manuale. Il tipo più frequente di risposta aperta univoca è costituito da un numero. Gli item a scelta multipla chiedono di scegliere una o più risposte fra le opzioni presentate. Queste risposte possono essere in genere processate automaticamente. I tre formati sono rappresentati nelle prove di rilevazione in proporzioni simili.

Nella somministrazione computerizzata vengono utilizzati anche altri formati. Un ambiente informatico si presta a una maggiore varietà di modalità di risposta rispetto alla carta e penna, oltre a facilitare la rilevazione di taluni aspetti della literacy matematica, p. es. la manipolazione e la rotazione di rappresentazioni di forme tridimensionali, non facilmente valutabile su carta. Il computer permette inoltre di migliorare la presentazione degli item. Per esempio si può utilizzare uno stimolo in movimento, rappresentare e ruotare oggetti tridimensionali, o avere un accesso più flessibile a dati e informazioni pertinenti. Sono possibili anche formati che permettono una gamma più ampia di risposte. Per esempio la modalità "clicca e trascina", o l'uso di hot spot su un'immagine consente agli studenti di rispondere a quesiti in modo non verbale, fornendo un quadro della loro literacy matematica meno legato alle abilità linguistiche. È possibile anche una certa interattività. La possibilità della codifica automatica della risposta può sostituire parte del lavoro manuale e, cosa più importante, può



facilitare la codifica delle caratteristiche dei disegni, degli schemi e delle procedure elaborati dagli studenti, attualmente ardui da codificare (Stacey and Wiliam, 2013).

Le prove PISA di matematica sono costituite da unità che comprendono materiale di stimolo testuale e spesso altre informazioni in forma di tabelle, grafici, mappe o diagrammi, più uno o più item collegato(i) a questo stimolo. Questo formato permette di coinvolgere gli studenti in un contesto o problema rispondendo a una serie di item correlati. D'altra parte però il modello di misurazione nell'analisi dei dati PISA presuppone l'indipendenza degli item tra di loro per cui, nel caso di unità che comprendono più di un item, gli sviluppatori dei test cercano di fare in modo che tra di loro vi sia la massima indipendenza possibile. L'indagine adotta questa struttura per favorire l'uso di contesti il più possibile realistici, tali da riflettere la complessità della realtà, e nel contempo sfruttare al meglio la durata del test. È tuttavia importante garantire un'adeguata varietà di contesti per limitare al massimo che la scelta di un contesto possa essere pregiudizievole e rendere l'item il più indipendente possibile. Gli sviluppatori cercano dunque di trovare l'equilibrio tra queste due esigenze contrastanti.

Gli item selezionati per le prove dell'indagine devono presentare un'ampia gamma di difficoltà per corrispondere alle diverse abilità degli studenti partecipanti. Inoltre, per quanto possibile tutte le principali categorie della rilevazione (categorie dei contenuti, dei processi e dei contesti) sono rappresentate da item che coprono l'intera gamma delle difficoltà. I gradi di difficoltà sono determinati, tra le altre proprietà che sono misurate, nel quadro di una prova sul campo condotta prima della selezione degli item per l'indagine principale PISA. Per essere inclusi nelle prove dell'indagine PISA gli item sono selezionati in base alla loro corrispondenza al quadro di riferimento e alle loro proprietà di misurazione.

Nello sviluppo e selezione degli item viene inoltre considerato con la massima attenzione il livello di competenza in lettura che ogni item richiede. Uno degli obiettivi è di rendere la formulazione il più possibile semplice e diretta. Si presta altresì attenzione a evitare contesti che possano far pensare a un'inclinazione culturale piuttosto che a un'altra, e tutte le scelte sono verificate con i team nazionali. La traduzione nelle varie lingue è condotta con estrema attenzione, facendo grande uso di processi di traduzione inversa e altri protocolli. In PISA 2012 il rischio di pregiudizio involontario è stato oggetto di un'attenzione ancora maggiore, considerato che la somministrazione informatizzata potrebbe presentare delle difficoltà a chi non ha accesso a un computer nelle lezioni di matematica.

Strumenti matematici

La politica di PISA è di consentire l'uso delle calcolatrici nelle prove cartacee se sono normalmente consentite nelle scuole. Questo è il modo più autentico di valutare le possibilità degli studenti, e consente un raffronto più ricco di informazioni della performance dei vari sistemi scolastici. La scelta di permettere l'uso della calcolatrice non è diversa, in via di principio, da qualsiasi altro orientamento in materia di politica dell'istruzione fatto da sistemi sui quali PISA non esercita un controllo. Nel ciclo PISA 2012, per la prima volta in una rilevazione della literacy matematica, alcune prove cartacee saranno sviluppate in modo tale che una calcolatrice dovrebbe rendere più rapido e facile il procedimento – in altre parole, in certe prove è probabile che la disponibilità di una calcolatrice sia un vantaggio per molti studenti. Nella componente cartacea di PISA 2012 non saranno richieste funzionalità che vanno oltre le prestazioni di una comune calcolatrice.

Nelle prove computerizzate di PISA 2012 gli studenti avranno accesso a una calcolatrice online e/o un software con funzionalità equivalenti per gli item dove ciò sia pertinente. Gli studenti potranno altresì utilizzare una calcolatrice a mano purché di modello equivalente a quelli approvati nel rispettivo sistema scolastico per la loro fascia di età. Potranno essere forniti ulteriori strumenti nella somministrazione delle prove, per esempio dispositivi virtuali di misurazione, funzioni di base dei fogli di calcolo e vari strumenti di presentazione grafica e di visualizzazione.

Attribuzione dei punteggi

In gran parte, gli item sono corretti in modo dicotomico, vale a dire la risposta è 'giusta' o 'sbagliata', tuttavia le risposte aperte possono comportare dei punteggi parziali, in base a diversi livelli di 'correttezza' delle risposte. Per questi casi, alle persone che sono state formate per la correzione viene fornita una guida dettagliata che permette l'attribuzione di punteggi pieni, parziali o nulli grazie alla quale nei diversi paesi partecipanti i punteggi sono attribuiti in modo coerente e affidabile.

Presentazione della competenza in matematica

I risultati dell'indagine PISA per la matematica sono presentati in diversi modi. La stima del livello globale di competenza matematica si ottiene a partire da campioni di studenti di ciascun paese da cui si ricava una serie di livelli di competenza. Viene inoltre descritto il livello medio di literacy matematica per i diversi livelli individuati. Oltre a ciò si identificano aspetti della competenza matematica pertinenti alle politiche educative dei paesi partecipanti, se ne deducono stime separate, e il grado di competenza degli studenti è descritto anche in base a queste scale. Gli aspetti potenzialmente utili ai fini della presentazione possono essere definiti in vari modi. Per PISA 2003 sono state messe a punto delle scale basate sulle quattro

grandi categorie di contenuto. La figura 1.3 riporta i sei gradi o livelli di competenza utilizzati per la scala di rilevazione della literacy matematica nei cicli PISA 2003, 2006 e 2009, e che costituiscono la base della scala di competenza matematica del ciclo 2012.

• Figura 1.3 •

Descrizioni dei livelli di competenza matematica (cicli 2003-2009)

Livello	
6	Al livello 6 gli studenti sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni sulla base delle loro proprie ricerche e della modellizzazione di situazioni problematiche complesse. Sanno mettere in relazione diverse fonti di informazione e rappresentazioni muovendosi al loro interno senza difficoltà. Possono fare riflessioni e ragionamenti matematici difficili. Sanno applicare la loro comprensione e intuizione con una padronanza delle operazioni e relazioni matematiche simboliche e formali che permette loro di elaborare approcci e strategie di attacco in presenza di situazioni mai incontrate prima. A questo livello, gli studenti sono in grado di formulare e comunicare con precisione le loro azioni e riflessioni in relazione ai loro risultati, interpretazioni, argomentazioni e alla loro pertinenza rispetto alle situazioni iniziali.
5	Al livello 5 gli studenti possono mettere a punto e utilizzare modelli per situazioni complesse, identificando i vincoli e specificando i presupposti. Sanno selezionare, raffrontare e valutare le strategie appropriate alla soluzione di problemi complessi in relazione a tali modelli. Sono in condizione di affrontare situazioni da un'angolazione strategica, ricorrendo a competenze ben sviluppate di ragionamento e riflessione, alle relative rappresentazioni, caratterizzazioni simboliche e formali con una comprensione approfondita di tali situazioni. Riflettono sulle loro azioni e sanno formulare e comunicare le loro interpretazioni e il percorso seguito nel ragionamento.
4	Al livello 4 gli studenti sanno lavorare efficacemente con modelli espliciti di complesse situazioni concrete che possono comportare vincoli e richiedere deduzioni. Possono selezionare e integrare rappresentazioni di tipo diverso, anche simboliche, collegandole direttamente a situazioni del mondo reale. A questo livello, in questi contesti, gli studenti sono in grado di utilizzare competenze ben sviluppate e flessibilità di ragionamento, con un certo grado di profondità di comprensione. Possono elaborare ed esprimere argomentazioni e spiegazioni delle loro interpretazioni e azioni.
3	Al livello 3 gli studenti sono in grado di seguire procedure chiaramente descritte, comprese procedure che richiedono decisioni in sequenza. Sanno selezionare e applicare semplici strategie per risolvere problemi. A questo livello possono interpretare e utilizzare rappresentazioni a partire da fonti di informazione diverse e costruire un ragionamento su questa base. Sono in grado di elaborare comunicazioni succinte per presentare i loro risultati, interpretazioni e ragionamenti.
2	Al livello 2 gli studenti sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedono al massimo deduzioni dirette. Possono ricavare informazioni pertinenti da un'unica fonte e utilizzare una sola modalità di rappresentazione. Sono in grado di utilizzare algoritmi, formule, procedure o convenzioni elementari. Possono fare un ragionamento diretto e fornire un'interpretazione letterale dei loro risultati.
1	Al livello 1 gli studenti sanno rispondere a domande inserite in un contesto familiare dove tutte le informazioni sono esplicite e ciò che si chiede loro è chiaramente definito. Sono in grado di identificare informazioni ed eseguire procedure di routine seguendo istruzioni dirette in situazioni esplicite. Possono eseguire azioni ovvie derivanti direttamente dallo stimolo somministrato.

Dopo la prova sul campo, oltre alla scala generale per la competenza matematica sono elaborate tre scale sulla base dei tre processi matematici descritti più sopra: formulazione delle situazioni in forma matematica; utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici; e interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici.

Le capacità matematiche fondamentali giocano un ruolo centrale nella definizione dei diversi livelli della scala globale di literacy matematica e di ciascuno dei processi identificati in quanto definiscono l'accrescimento delle competenze in tutti questi aspetti della literacy matematica. Per esempio, nella descrizione del livello 4 (figura 1.3), la seconda frase sottolinea gli aspetti della matematizzazione e della rappresentazione che sono evidenti a questo livello. L'ultima frase evidenzia le facoltà di comunicazione, ragionamento e argomentazione tipiche del livello 4, in contrasto da una parte con la comunicazione succinta e la mancanza di argomentazione del livello 3 e dall'altra parte con la maggiore capacità di riflessione del livello 5. La sezione "Capacità matematiche fondamentali e loro relazione con la difficoltà degli item" del presente capitolo descrive le capacità matematiche fondamentali e la relazione di ciascuna di esse con lo sviluppo dei vari livelli di competenza matematica. In una precedente sezione del presente quadro e alla figura 1.2 ciascun processo è descritto in funzione delle capacità matematiche fondamentali che un individuo potrebbe attivare nell'ambito di quel processo.

Per continuità con i risultati del ciclo 2003, l'ultimo nel quale la matematica è stata ambito principale, e per la loro utilità ai fini delle politiche per l'istruzione, saranno presentate anche delle scale di competenza per le quattro categorie di contenuto: Quantità, Spazio e forme, Cambiamento relazioni, e Incertezza e dati. Queste scale rimangono interessanti per i paesi partecipanti perché possono rivelare dei profili negli aspetti della literacy matematica risultanti da determinate priorità dei programmi scolastici.



Atteggiamenti verso la matematica

L'atteggiamento, le convinzioni e le emozioni di una persona giocano un ruolo non trascurabile nel suo interesse per la matematica in generale e per l'uso che questa persona ne fa nella sua vita quotidiana. Gli studenti che sono più a loro agio con la matematica, per esempio, faranno ricorso più di altri a questa disciplina nei vari contesti in cui si ritroveranno. Gli studenti che hanno atteggiamenti positivi verso la matematica hanno maggiori probabilità di apprenderla rispetto a quelli che l'affrontano con ansia. Per questo uno degli obiettivi dell'insegnamento della matematica è lo sviluppo di atteggiamenti, convinzioni ed emozioni che aiutino gli studenti a utilizzare meglio le loro conoscenze matematiche, e ad apprendere maggiormente la materia nel loro interesse personale e sociale.

L'attenzione riservata a queste variabili nel ciclo di rilevazione 2012 è basata sulla tesi secondo cui lo sviluppo di atteggiamenti, convinzioni ed emozioni positivi verso la matematica è già di per sé un risultato valido nell'insegnamento e predispone gli studenti a utilizzare la matematica nella vita quotidiana. Inoltre queste variabili possono contribuire a spiegare le diversità nei livelli di literacy matematica degli studenti. Per questo l'indagine comprende anche prove correlate a tali variabili. L'indagine misura inoltre una serie di variabili contestuali che permettono la presentazione della literacy matematica di importanti sottogruppi di studenti (p. es. in base al sesso, alla lingua o all'origine etnica).

Allo scopo di acquisire tali informazioni di contesto, PISA chiede agli studenti e ai dirigenti delle loro scuole di rispondere a questionari di contesto della durata di 20- 30 minuti. Tali questionari sono fondamentali per l'analisi dei risultati in relazione a svariate caratteristiche degli studenti e delle scuole.

Per il ciclo di rilevazione 2012, sono state identificate, per la loro potenziale rilevanza, due grandi categorie di atteggiamenti che predispongono gli studenti a interessarsi alla matematica in modo produttivo. Si tratta dell'interesse dello studente per la matematica e della sua volontà di impegnarsi nella materia.

L'interesse per la matematica presenta elementi connessi all'attività presente e futura. Le relative domande sono incentrate sull'interesse degli studenti per la matematica in ambito scolastico, se la considerano utile per la vita reale, se intendono approfondire lo studio della materia e avviarsi verso una carriera in cui la matematica è importante. Quest'ultimo punto preoccupa un po' tutti i paesi perché in molti di essi si registra una diminuzione della percentuale di studenti che scelgono studi superiori di orientamento matematico, proprio in un momento in cui vi è sempre più richiesta di laureati in queste discipline.

La volontà di dedicarsi alla matematica è legata ad atteggiamenti, emozioni e convinzioni che predispongono gli studenti a trarre, o non trarre, vantaggio dalla literacy matematica che hanno acquisito. Gli studenti che amano la matematica e che sono a loro agio nella materia hanno maggiori probabilità di utilizzare la disciplina per riflettere sulle varie situazioni della loro vita reale, a scuola o altrove. I costrutti dell'indagine PISA pertinenti a questo riguardo sono il piacere, la (non) fiducia in se stessi, l'ansia (o assenza di ansia) verso la matematica, e l'immagine di se stessi e della propria efficienza. Da una recente analisi del percorso successivo dei giovani studenti australiani che a 15 anni avevano ottenuto un punteggio scarso nell'indagine PISA risulta che quelli che "riconoscono il valore della matematica per il loro futuro successo hanno più probabilità di avere successo, nel senso di essere soddisfatti di molti aspetti della loro vita personale e non solo della carriera professionale" (Thomson and Hillman, 2010, p. 31). Lo studio in questione raccomanda di insistere sulle applicazioni pratiche della matematica nella vita di ogni giorno perché questo potrebbe migliorare le prospettive degli studenti i cui risultati sono scarsi.

Il questionario per gli studenti include una serie di punti relativi alle possibilità di apprendimento. Questi punti riguardano la loro esperienza rispetto a problemi di matematica applicata di varia natura, alla loro familiarità con i nomi dei concetti matematici (sono previste misure per avvalorare quanto affermano) e la loro esperienza in classe o nel quadro di prove analoghe a quelle dell'indagine PISA. Queste rilevazioni permettono un'analisi più approfondita dei risultati dell'indagine PISA.

I risultati del ciclo 2012 forniranno informazioni in merito sia al rendimento degli studenti sia al loro atteggiamento, rilevanti per le politiche pubbliche dei paesi partecipanti. Combinando i risultati della rilevazione della literacy matematica con lo studio di atteggiamenti, emozioni e convinzioni che predispongono gli studenti a utilizzare la loro literacy matematica emerge un quadro più completo.



Somministrazione informatizzata facoltativa delle prove di matematica

Il ciclo PISA 2012 prevede una somministrazione computerizzata delle prove di matematica.⁴ Pur essendo facoltativa per i paesi partecipanti (considerate le diverse capacità tecnologiche), due aspetti principali depongono a favore della sua inclusione nel ciclo 2012. In primo luogo, i computer sono ormai talmente diffusi sul luogo di lavoro e nella vita privata che, nel XXI secolo, un livello di competenza in literacy matematica comporta il loro uso (Hoyles et al., 2002). I computer fanno parte della vita delle persone in tutto il mondo nei suoi aspetti personali, sociali, occupazionali e scientifici. Essi permettono, tra l'altro, di calcolare, rappresentare, visualizzare, modificare, esplorare e sperimentare su, intorno e con, una moltitudine di oggetti, fenomeni e processi matematici. La definizione di literacy matematica per il ciclo 2012 riconosce l'importante ruolo degli strumenti informatici osservando come ci si aspetti che le persone matematicamente competenti siano capaci di utilizzarli per descrivere, spiegare e predire dei fenomeni. Nella definizione, la parola "strumenti" si riferisce a calcolatrici e computer, nonché ad altri oggetti fisici come righelli e compassi utilizzati come strumenti di misurazione o costruzione. In secondo luogo, l'informatica offre agli sviluppatori varie possibilità di scrivere prove più interattive, interessanti e realistiche (Stacey and Wiliam, 2013). Si ricorderà per esempio la possibilità di utilizzare nuovi formati (p. es. "clicca e trascina"), di presentare agli studenti dati del mondo reale (p. es. grandi insiemi di dati elaborabili), o di utilizzare grafica e colori per rendere le prove più accattivanti.

In questo contesto, la somministrazione informatizzata delle prove di matematica è la principale innovazione del ciclo PISA 2012. Le unità PISA appositamente create sono presentate al computer, e gli studenti rispondono al computer. Possono anche utilizzare carta e penna per aiutarsi nel processo di riflessione. I prossimi cicli PISA potranno presentare degli item informatizzati più sofisticati man mano che gli autori e sviluppatori di item si immergeranno nelle prove computerizzate. In effetti il ciclo 2012 non è che un punto di partenza rispetto alle possibilità della rilevazione computerizzata.

Il fatto di avvalersi delle funzionalità offerte dall'informatica permette di proporre agli studenti degli item più accattivanti, più coinvolgenti e più facili da comprendere. Per esempio agli studenti può essere proposto uno stimolo in movimento, la rappresentazione e rotazione di oggetti tridimensionali, o un accesso più flessibile a dati e informazioni pertinenti. Nuovi formati, come la modalità "clicca e trascina", o l'uso di hot spot su un'immagine, consentono di interessare maggiormente gli studenti offrendo un ventaglio più ampio di tipologie di risposte e fornendo un quadro più completo della loro literacy matematica.

Dalle ricerche emerge che negli ambienti professionali aumenta l'esigenza di abilità matematiche in presenza di tecnologie elettroniche, pertanto la literacy matematica e l'uso del computer sono interconnessi (Hoyles et al., 2002). I lavoratori a qualsiasi livello della scala gerarchica devono far fronte all'interdipendenza tra literacy matematica e uso dell'informatica, e la componente informatica dell'indagine PISA permette di esplorare questa relazione. È importante distinguere tra le esigenze matematiche di un item informatizzato nel quadro di PISA e le esigenze che non hanno un legame con la competenza matematica, ovvero quelle relative alla tecnologia dell'informazione e comunicazione (TIC) e i nuovi formati di presentazione. Nel quadro della somministrazione informatizzata delle prove è indispensabile fare il possibile affinché le esigenze associate all'uso di uno strumento siano nettamente inferiori rispetto alle esigenze matematiche. Sono già stati condotti degli studi sull'impatto che può avere l'ambiente informatico sui risultati degli studenti (Bennett, 2003; Bennett et al., 2008; Mason, 2001; Richardson et al., 2002; Sandene et al., 2008), e PISA 2012 offre l'opportunità di approfondire queste conoscenze, in particolare per informare lo sviluppo di future prove informatizzate per il 2015 e oltre. Per scelta, non tutti gli item informatizzati utilizzeranno nuovi formati, e questo aiuterà a verificare l'impatto (positivo o negativo) dei nuovi formati sui risultati ottenuti.

⁴Nel ciclo PISA 2006 ha avuto luogo una prova computerizzata sperimentale di scienze e in quello 2009 ha avuto luogo una prova computerizzata sperimentale di comprensione della lettura.



Ai fini del controllo delle diverse caratteristiche delle prove informatizzate, per ciascun item sono descritti tre aspetti:

Le competenze matematiche valutate. Questo comprende aspetti della literacy matematica applicabili a qualsiasi ambiente, non solo informatico, e che sono valutati in ogni item informatizzato.

Competenze che presentano aspetti sia matematici sia informatici (TIC). Queste richiedono di saper 'fare matematica' con l'aiuto di un computer o un altro ausilio. Vengono testate in alcuni item – ma non tutti – della somministrazione informatizzata. La prova computerizzata può prevedere la rilevazione delle seguenti competenze:

- creare un grafico a partire da dati, incluse tabelle di valori (p. es. a torta, a barre, lineare) con l'assistenza di 'wizard' elementari;
- generare grafici di funzioni e utilizzarli per rispondere a quesiti sulle funzioni;
- classificare informazioni e pianificare efficienti strategie di cernita;
- utilizzare calcolatrici tascabili o su computer;
- utilizzare strumenti virtuali, p. es. un regolo o un goniometro virtuale; e
- trasformare immagini utilizzando una finestra di dialogo o il mouse per ruotare, riflettere o traslare l'immagine.

Competenze TIC (relative alla tecnologia dell'informazione e comunicazione). Così come le prove 'carta e penna' richiedono competenze elementari per lavorare con materiali stampati, la somministrazione informatizzata richiede una serie di competenze elementari per lavorare al computer. Tra queste, la conoscenza degli strumenti fisici (p. es. tastiera e mouse) e delle convenzioni elementari (uso delle frecce per spostarsi in alto, in basso e di lato e di tasti corrispondenti a determinati comandi). In ogni somministrazione informatizzata, l'intenzione è di mantenere l'esigenza di tali competenze al livello più elementare possibile.

SINTESI

L'obiettivo di PISA per quanto attiene alla literacy matematica è di mettere a punto indicatori che possano mostrare il grado di efficacia con la quale i diversi paesi preparano gli studenti all'utilizzo della matematica nei vari aspetti della loro vita personale, civile e professionale, in qualità di cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi. A questo proposito, PISA ha sviluppato una definizione di literacy matematica e un quadro di riferimento che riflette le componenti più importanti di tale definizione. Gli item messi a punto e selezionati per il ciclo 2012, basati sulla definizione e sul quadro di riferimento, intendono riflettere in modo equilibrato i processi, contenuti e contesti matematici. Devono infatti contribuire a determinare la capacità degli studenti di applicare quanto appreso. Tali item chiedono agli studenti di utilizzare le loro conoscenze avviando dei processi e mettendo in pratica le loro capacità di risolvere problemi basati sull'esperienza del mondo reale. I problemi sono presentati in diversi formati con vari livelli di strutturazione e orientamento, ma l'enfasi è posta su problemi autentici, sui quali gli studenti devono riflettere da soli.

Riquadro 1.1 CAPACITA' MATEMATICHE FONDAMENTALI E LORO RELAZIONE CON LA DIFFICOLTA' DEGLI ITEM

Un buon metodo per analizzare la difficoltà empirica degli item è considerare quali aspetti delle capacità matematiche fondamentali siano necessari per formulare e applicare una soluzione (Turner, 2012, Turner and Adams, 2012; Turner et al., 2013). Gli item più facili richiedono il ricorso a poche competenze e in modo relativamente diretto. Quelli più difficili richiedono l'interazione complessa di molteplici capacità. Per stabilire a priori la difficoltà è necessario considerare sia il numero di capacità sia la complessità della loro attivazione. Le sezioni successive illustrano le caratteristiche che rendono più o meno complessa l'attivazione di una capacità (vedi anche Turner, 2012).

Comunicazione: diversi fattori determinano il livello e la portata dell'esigenza di comunicazione di un compito, e la capacità di un individuo di rispondere a tali esigenze indica fino a che punto questi padroneggia la capacità di comunicazione. Dal punto di vista della ricezione, questi fattori includono la lunghezza e complessità del testo o altro oggetto da leggere e interpretare, la natura più o meno familiare delle idee o delle informazioni riportate nel testo/oggetto, la misura in cui le informazioni devono essere districate da altre informazioni, l'ordine delle informazioni e il fatto che corrisponda o meno all'ordine dei processi mentali necessari a interpretarle e utilizzarle, e la diversità degli elementi (testi, elementi grafici, diagrammi, tabelle, ecc.) da interpretare gli uni in relazione agli altri. Quanto agli aspetti espressivi della comunicazione, il livello inferiore corrisponde ai quesiti che richiedono di fornire una semplice risposta numerica. La difficoltà aumenta con la necessità di fornire soluzioni più ampie, per esempio quando si richiede una spiegazione o giustificazione verbale o scritta.

Matematizzazione: Taluni compiti non richiedono matematizzazione – o perché il problema è posto già in forma sufficientemente matematica, o perché la relazione tra il modello e la situazione che rappresenta non è necessar... ia per risolvere il problema. L'esigenza di matematizzazione compare nella sua forma meno complessa allorché chi deve risolvere il problema deve interpretare e dedurre direttamente da un dato modello, o traslare direttamente una situazione in forma matematica (p. es. strutturare e concettualizzare la situazione in modo pertinente, identificare e selezionare le relative variabili, raccogliere misurazioni pertinenti e/o fare dei diagrammi). L'esigenza di matematizzazione aumenta in presenza di ulteriori requisiti di modifica o utilizzo di un dato modello per captare l'evoluzione delle condizioni o interpretare relazioni implicite; scegliere un modello familiare entro vincoli chiari ben delimitati; o creare un modello in cui variabili, relazioni e vincoli sono espliciti e chiari. A un livello ulteriore, l'esigenza di matematizzazione è associata alla necessità di creare o interpretare un modello in una situazione che richiede di identificare o definire numerosi presupposti, variabili, relazioni e vincoli, e di verificare che tale modello soddisfi i requisiti del compito; oppure quando si tratta di valutare o raffrontare modelli.

Rappresentazione: questa capacità matematica è richiesta, a livello elementare, quando si tratta di manipolare direttamente una rappresentazione familiare, per esempio passare direttamente dal testo ai numeri, o leggere un valore direttamente da un grafico o una tabella. L'onere cognitivo aumenta in presenza di rappresentazioni che richiedono la selezione e l'interpretazione di una rappresentazione standard o familiare rispetto a una situazione, e aumenta ulteriormente quando si tratta di utilizzare o tradurre due o più rappresentazioni rispetto a una situazione, compreso il fatto di modificare una rappresentazione; oppure quando si chiede di elaborare una rappresentazione diretta di una situazione. Un livello ulteriore è segnato dall'esigenza di comprendere e utilizzare una rappresentazione non standard che richiede un sostanziale lavoro di decodifica e interpretazione; di concepire una rappresentazione che include gli aspetti principali di una situazione complessa; o di raffrontare o valutare rappresentazioni diverse.

Ragionamento e argomentazione: nei compiti per i quali l'esigenza di attivazione di questa capacità è minima, il ragionamento può consistere semplicemente nel seguire le istruzioni. A un livello lievemente superiore può essere richiesta qualche riflessione per collegare frammenti diversi di informazione per fare delle deduzioni (p. es. collegare componenti separate dello stesso problema, o applicare un ragionamento diretto a un aspetto del problema). A un livello ulteriore può essere richiesta un'analisi delle informazioni per elaborare un'argomentazione articolata in più passaggi o collegare tra loro diverse variabili; o ancora fare un ragionamento a partire da fonti di informazione correlate. Al livello di richiesta più elevato è necessario saper sintetizzare e valutare le informazioni, o utilizzare o creare ragionamenti concatenati per giustificare le supposizioni, o fare delle generalizzazioni basandosi su molteplici elementi di informazione dando loro senso e forma.

Elaborazione di strategie: nei compiti che richiedono un'applicazione minima di questa capacità spesso è sufficiente attivarsi direttamente seguendo una strategia descritta o ovvia. A un livello ulteriore può essere necessario decidere una strategia adeguata tenendo conto delle relative informazioni per arrivare a una conclusione. Il carico cognitivo è ulteriormente sollecitato quando occorre elaborare e attuare una strategia per trasformare le informazioni date prima di arrivare a una conclusione. I compiti più difficili prevedono l'elaborazione di una strategia complessa per arrivare a una soluzione esauriente o a una conclusione generalizzata; oppure la valutazione il raffronto di diverse strategie possibili.



Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni: l'esigenza di attivazione di questa capacità varia enormemente da un compito all'altro. Nei casi più semplici non è necessario attivare regole matematiche o espressioni simboliche più complesse dei calcoli aritmetici fondamentali, e con cifre piccole o facili da elaborare. Un livello superiore può richiedere calcoli aritmetici sequenziali o l'uso diretto di una semplice relazione funzionale, implicita o esplicita (p. es. relazioni lineari familiari), di simboli matematici formali (per sostituzione diretta o con una serie di operazioni aritmetiche concatenate che includono frazioni e decimali); o l'attivazione e l'uso diretto di una definizione, convenzione o concetto simbolico formale. L'onere cognitivo aumenta allorché si richiede il ricorso esplicito e la manipolazione di simboli (per ricomporre una formula in modo algebrico), o l'uso di regole, convenzioni, procedure o formule matematiche mediante una combinazione di relazioni multiple o concetti simbolici. A un livello superiore si richiede l'applicazione in più passaggi di procedure matematiche formali, l'impiego flessibile di relazioni funzionali o algebriche, o l'uso di tecniche e conoscenze matematiche per arrivare al risultato.

Utilizzo di strumenti matematici: nei compiti e attività che richiedono un impiego minimo di questa capacità gli studenti potrebbero dover utilizzare direttamente strumenti familiari (uno strumento di misurazione, per esempio) in situazioni dove l'uso di tale strumento è abituale. La difficoltà aumenta allorché l'uso dello strumento prevede una sequenza di processi o il collegamento di informazioni dirette, o allorché gli strumenti stessi sono meno comuni o la situazione in cui si richiede l'uso dello strumento è meno familiare. E aumenta ulteriormente se lo strumento deve essere utilizzato per trattare e mettere in relazione elementi molteplici e diversi, se lo strumento deve essere utilizzato in una situazione assai diversa dalle sue normali applicazioni, se lo strumento stesso è complesso e permette impieghi multipli, e se è necessaria una riflessione per comprendere e valutare i meriti e i limiti dello strumento.

ITEM PISA - ESEMPI

I seguenti item sono stati resi pubblici e sono intesi a illustrare alcuni aspetti e sfumature descritte quadro di riferimento del PISA 2012. Questi sette item, benché selezionati per rappresentare un ventaglio di tipologie, processi, contenuti e contesti, nonché per descrivere l’attivazione delle capacità matematiche fondamentali, non rappresentano lo spettro completo di ciascun aspetto.

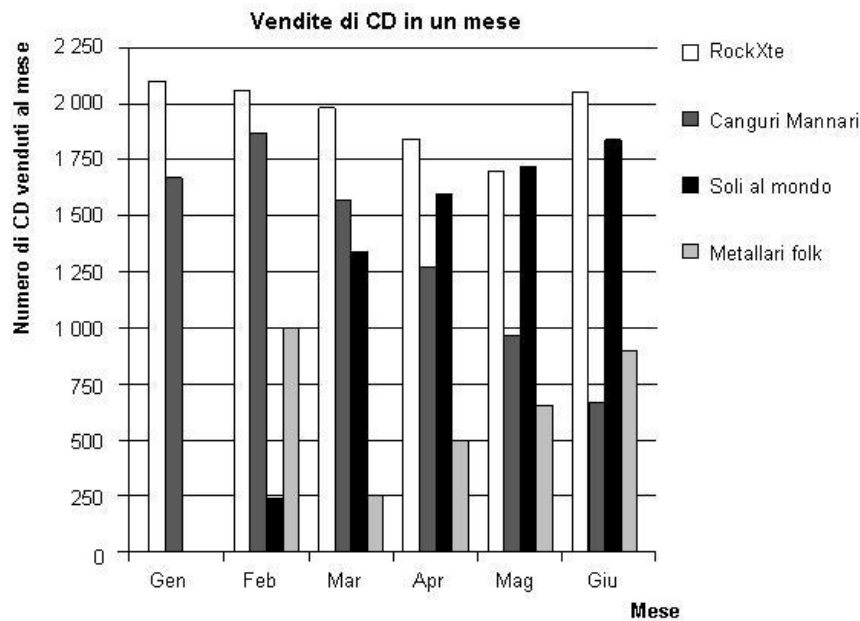
CLASSIFICHE

Il primo esempio, intitolato *Classifiche*, comprende un’informativa di stimolo sotto forma di testo e di un grafico a barre che rappresenta le vendite di CD di quattro gruppi musicali su un periodo di sei mesi e tre item a scelta multipla (figura 1.4).

• Figure 1.4 •

Item della prova *Classifiche*

A gennaio è uscito il nuovo CD dei gruppi RockXte e Canguri Mannari, seguito a febbraio dal CD dei gruppi Soli al mondo e Metallari folk. Il seguente grafico illustra le vendite dei CD di questi gruppi da gennaio a giugno.



DOMANDA 1

Quanti CD ha venduto il gruppo Metallari folk ad aprile?

- A. 250
- B. 500
- C. 1 000
- D. 1 270

DOMANDA 2

In quale mese il gruppo Soli al mondo ha venduto per la prima volta più CD del gruppo Canguri Mannari?

- A. Nessun mese
- B. Marzo
- C. Aprile
- D. Maggio

DOMANDA 3

Il manager dei Canguri Mannari è preoccupato perché il numero dei CD venduti dal gruppo è diminuito da febbraio a giugno.

Quale sarà il volume di vendite stimato del gruppo per il mese di luglio, se continua la stessa tendenza negativa?

- A. 70 CDs
- B. 370 CDs
- C. 670 CDs
- D. 1 340 CDs

L’unità *Classifiche* è stata somministrata durante PISA 2012. I tre item dell’unità ricadono tutti nella categoria di contenuto *Incertezza e dati*, infatti si chiede agli studenti di leggere, interpretare e utilizzare dati matematici presentati in forma grafica. Inoltre ricadono tutti nella categoria di contesto *Sociale*; infatti i dati riguardano informazioni pubbliche sulle vendite di CD, un tipo di dati che si possono normalmente reperire nei giornali, nelle riviste specializzate e online. I primi due quesiti sono esempi della categoria di processo *interpretare, applicare e valutare dei risultati matematici*; infatti si chiede di interpretare



le informazioni matematiche presentate nel grafico in relazione alle caratteristiche del contesto dato; il terzo quesito ricade nella categoria utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici perché riguarda l'applicazione di conoscenze procedurali per manipolare la rappresentazione matematica al fine di effettuare un'ulteriore deduzione. I tre quesiti sono tra i più facili somministrati nell'indagine PISA 2012.

Il quesito 1 (vedi figura 1.5) richiede una lettura diretta dei dati del grafico per rispondere a una domanda sul contesto. Gli studenti devono orientarsi verso le informazioni fornite, identificare quale serie di dati rappresenta le vendite di un dato gruppo, quale barra rappresenta un dato mese nella serie di dati, e leggere direttamente il valore 500 CD in asse verticale. Il testo, semplice e chiaro, presenta un'esigenza di comunicazione minima. La strategia da utilizzare è ovvia: si tratta solo di reperire nel grafico le informazioni richieste. Quanto alla matematizzazione, si chiede di fare una deduzione sulla situazione delle vendite a partire direttamente dal modello grafico. La capacità di rappresentazione è richiesta a livello minimo poiché si tratta solo di leggere un valore direttamente dal grafico. Il formato del grafico è familiare alla maggior parte degli studenti quindicenni e l'unico sforzo richiesto è di leggere le etichette per identificare ciò che viene rappresentato. Uno degli assi rappresenta una categoria (mesi) e l'altezza della barra è specificata (500) cosicché non è necessario comprendere la scala. La competenza tecnica necessaria non va al di là della conoscenza della forma grafica; ed è richiesta solo una deduzione diretta, pertanto l'aspetto ragionamento e argomentazione è minimo. Data la facilità dell'item, l'87% degli studenti ha identificato la risposta corretta, B.

Il quesito due è appena più difficile e circa il 78% ha risposto correttamente C. Per rispondervi, gli studenti devono osservare la relazione tra due serie di dati riportati nel grafico a barre per comprendere i cambiamenti intercorsi durante il periodo visualizzato e riconoscere che la condizione specificata nel quesito si è verificata per la prima volta in aprile.

L'esigenza di comunicazione è analoga a quella del quesito 1. La strategia è lievemente più difficile dato che occorre mettere insieme diversi elementi delle due serie di dati. Anche in questo caso, per quanto riguarda la matematizzazione si chiede di fare una deduzione sulla situazione delle vendite a partire direttamente dal modello grafico. L'esigenza di rappresentazione è un po' maggiore perché rispetto alla lettura di un singolo punto del quesito 1, qui infatti si tratta di collegare due serie di dati più la variabile temporale. L'esigenza di utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni è minima trattandosi di fare solo un raffronto qualitativo, mentre l'esigenza di ragionamento e argomentazione è lievemente maggiore perché nel ragionamento è richiesta una piccola sequenza di passaggi.

Il quesito 3 si differenzia dai primi due perché chiede di comprendere una relazione matematica visualizzata nel grafico e quindi di estrapolare tale relazione per predire il valore del mese successivo. Il collegamento al contesto esiste sempre, ma si chiede principalmente di lavorare con le informazioni matematiche fornite. Per rispondere si potrebbe per esempio leggere i valori di ogni mese, stimare un ragionevole valore medio del tasso di diminuzione mensile e applicare tale tasso al valore dell'ultimo mese. L'esigenza di comunicazione resta limitata. Si tratta solo di non farsi distrarre dalle serie di dati relative agli altri gruppi. D'altra parte, l'unica risposta errata comunemente riscontrata può essere dovuta a una cattiva comprensione della frase "la tendenza negativa continua". Il 15% degli studenti ha risposto C, stimando le vendite di luglio pari a quelle di giugno. Potrebbero aver scelto il valore costante perché mantiene i dati di vendita negativi di giugno anche a luglio. Qui la strategia è chiaramente più complessa rispetto ai primi due quesiti e la sua attuazione richiede un certo controllo. Occorre prendere delle decisioni, in particolare se utilizzare tutti e cinque i dati da febbraio a giugno oppure basarsi su una media dei cinque mesi, se fare un calcolo esatto, disegnare o visualizzare una curva di tendenza o ricorrere a stime approssimate osservando che ogni mese le vendite calano di poco più di un gradino sull'asse verticale. L'esigenza di matematizzazione prevede una piccola manipolazione del modello dato in relazione al contesto; è richiesto qualche calcolo (sottrazione ripetuta di numeri a più cifre, lettura dell'evoluzione scalare tra i punti) che richiede una maggiore capacità di utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni. L'esigenza di rappresentazione comporta la deduzione di una relazione tendenziale illustrata nel grafico; ed è richiesta una piccola sequenza di passaggi nel ragionamento necessario a risolvere il problema. Resta il fatto che anche questo quesito è relativamente facile e che il 76% circa degli studenti ha dato la risposta corretta B nell'indagine 2012.



• Figura 1.5 •

Item della Prova Salita al Monte Fuji

Il monte Fuji è un famoso vulcano spento, situato in Giappone.

DOMANDA 1

Ogni anno, il monte Fuji è aperto al pubblico solo dal 1° luglio al 27 agosto. Circa 200.000 persone salgono sul monte Fuji durante questo periodo.

In media, quante persone salgono sul monte Fuji ogni giorno?

- A. 340
- B. 710
- C. 3 400
- D. 7 100
- E. 7 400

DOMANDA 2

Il sentiero Gotemba, che conduce alla cima del monte Fuji, è lungo circa 9 chilometri (km).

Gli escursionisti devono essere di ritorno dall'escursione di 18 km entro le 20:00.

Toshi stima di poter salire sulla montagna ad una velocità media di 1,5 chilometri all'ora e di scendere raddoppiando questa velocità. Queste velocità tengono già conto delle pause per mangiare e dei momenti di riposo.

In base alle velocità stimate da Toshi, a che ora, al più tardi, deve iniziare la sua escursione in modo da poter essere di ritorno per le 20:00?

DOMANDA 3

Durante la sua escursione sul sentiero Gotemba, Toshi porta con sé un podometro per contare i suoi passi.

Il suo podometro indica che ha fatto 22.500 passi in salita.

Stima la lunghezza media del passo di Toshi durante la salita di 9 chilometri lungo il sentiero Gotemba. Dai la tua risposta in centimetri (cm).

Risposta cm

SALITA AL MONTE FUJI

La seconda unità si intitola Salita al monte Fuji (vedi figura 1.5). Il primo quesito è a risposta multipla semplice mentre il secondo e il terzo sono a risposta aperta univoca e richiedono risposte numeriche. Per il terzo item è disponibile un punteggio parziale. Questo tipo di punteggio è disponibile per taluni item dove sono possibili risposte di diverso livello qualitativo, e dove abilità diverse tra loro possono essere associate con risposte di tipo diverso.

La prova Salita al monte Fuji è stata somministrata durante il PISA 2012 prima di essere resa pubblica. Le domande 1 e 3 ricadono nella categoria di contenuto Quantità, infatti chiedono di fare dei calcoli con date e misurazione e di fare conversioni. Nella domanda 2 il concetto centrale è la velocità, pertanto ricade nella categoria di contenuto Cambiamento e relazioni.

Tutte rientrano nella categoria di contesto Sociale, infatti i dati riguardano informazioni relative all'accesso del pubblico al monte Fuji. Le prime due sono esempi della categoria di processo formulazione di situazioni in forma matematica, infatti si chiede di creare un modello matematico che possa rispondere alle domande poste.

La domanda 3 ricade nella categoria Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici perché il compito principale è di calcolare una media facendo attenzione a convertire le unità in modo appropriato, e lavorare essenzialmente sugli aspetti matematici del problema piuttosto che collegare tali aspetti agli elementi contestuali. Dall'indagine 2012



emerge che il grado di difficoltà delle tre domande varia significativamente. La domanda 1 risulta di difficoltà media mentre la 2 e la 3 risultano assai difficili.

La domanda 1 chiede di calcolare la media giornaliera del numero di visitatori. Il testo, semplice e chiaro, presenta un'esigenza di comunicazione ridotta. La strategia richiesta è di difficoltà moderata, infatti si tratta solo di ricavare il numero di giorni dalle date fornite e utilizzarlo per calcolare la media. Questa soluzione a più passaggi richiede un certo controllo, quindi rientra anche nella competenza elaborazione di strategie. L'esigenza di matematizzazione è minima, infatti le quantità matematiche richieste sono fornite direttamente nella domanda (numero di persone/giorno). Altrettanto minima è l'esigenza di rappresentazione, infatti la domanda contiene solo testo e numeri. Le conoscenze tecniche richieste comprendono la capacità di calcolare una media, ricavare il numero di giorni dalle date, saper fare una divisione (con la calcolatrice o meno, secondo l'opzione scelta dai singoli paesi) e arrotondare correttamente il risultato. Non vi è una grande esigenza di ragionamento e argomentazione. Questo item è risultato di difficoltà media: il 46% degli studenti hanno risposto correttamente C. Le due scelte errate più comuni sono E (che si ottiene dividendo per 27 giorni anziché $31+27$ giorni) con il 19% delle risposte, e A (errore di scala) con il 12% delle risposte.

La domanda 2 è nettamente più difficile, considerato che solo il 12% degli studenti ha risposto correttamente. Uno dei fattori di difficoltà è che si tratta di un item a risposta aperta univoca, piuttosto che a scelta multipla, quindi gli studenti non dispongono di nessun orientamento quanto alla possibile risposta corretta. Ma vi sono anche diversi altri fattori. Per questa domanda, circa il 61% delle risposte erano risposte errate, non mancanti.

L'esigenza di comunicazione è ridotta e, nell'aspetto ricettivo, simile a quella della domanda 1. La parte espressiva richiede solo una risposta numerica. La strategia da utilizzare è più difficile, infatti è necessario elaborare un piano sulla base dei tre elementi principali. A partire dalle velocità medie occorre calcolare le durate di salita e discesa della montagna, dopo di che occorre calcolare l'orario di partenza a partire dall'orario di arrivo e la durata totale dell'escursione. L'esigenza di matematizzazione è moderatamente elevata, infatti prevede aspetti quali la comprensione dell'inclusione della durata dei pasti e del fatto che l'escursione sarà prima in salita e, separatamente, in discesa. L'esigenza di rappresentazione è invece minima, infatti si richiede solo l'interpretazione del testo. Moderatamente elevato l'aspetto utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni: tutti i calcoli sono relativamente semplici (la divisione per il decimale 1,5 potrebbe essere un po' più impegnativa) ma richiedono costante accuratezza, ed è richiesta, implicitamente o esplicitamente, la formula per calcolare la durata sulla base della velocità e della distanza. Moderatamente elevata anche l'esigenza di ragionamento e argomentazione.

Anche la domanda 3 è difficile. Si tratta principalmente di calcolare la lunghezza media del passo a partire dalla distanza percorsa e dal numero di passi, ed è richiesta la conversione di unità. Per questa domanda, l'11% delle risposte nell'indagine 2012 hanno ottenuto il punteggio pieno per la risposta corretta (40 cm), un altro 4% ha avuto un punteggio parziale per risposte tipo 0,4 (risposta in metri, non cm) o 4000 dove probabilmente è stato utilizzato un errato fattore di conversione metri - centimetri. Il 62% delle risposte erano risposte errate, non mancanti. L'esigenza di comunicazione resta limitata come nelle altre domande, infatti il testo è piuttosto chiaro e semplice da interpretare e la risposta è costituita da un numero. La strategia richiesta da questa domanda è analoga a quella della domanda 1 – in ambedue i casi si tratta di calcolare una media. Benché la due domande utilizzino modelli analoghi per calcolare una media, la capacità di ragionamento e argomentazione richiesta per la 3 è maggiore rispetto alla 1. Nella domanda 1 la quantità richiesta è "persone/giorno" con il numero di persone già fornito e il numero di giorni facile da calcolare. La domanda 3 chiede di calcolare la "lunghezza del passo" a partire dalla distanza totale e dal numero di passi. Per collegare queste quantità è necessario un ragionamento maggiore (p. es. collegare la distanza fornita con la lunghezza). Anche l'esigenza di matematizzazione è maggiore, si tratta qui di comprendere in che modo la quantità 'lunghezza del passo', pertinente al mondo reale, sia in relazione con le misure generali. Il riconoscimento del contesto reale, incluso il fatto che la lunghezza del passo è probabilmente intorno ai 50 cm (piuttosto che 500 cm o 0,5 cm), è utile per valutare la ragionevolezza della risposta. L'esigenza di utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni è abbastanza elevata, infatti richiede la divisione di un piccolo numero (9 km) per un numero più grande (22500 passi) e la conoscenza dei fattori di conversione. Anche qui l'esigenza di rappresentazione è minima, trattandosi solo di un testo.

PIZZE

L'unità Pizze (vedi figura 1.6), a risposta aperta articolata, è semplice nella forma ma ricca di contenuto e illustra vari elementi del quadro di riferimento per la matematica. Somministrata per la prima volta nel ciclo PISA 1999, è stata quindi pubblicata a fini esemplificativi e dal 2003 appare come esempio in ogni versione del quadro di riferimento per la matematica. È risultata essere una delle prove più difficili tra quelle della prova sul campo per l'indagine 1999, con solo l'11% di risposte corrette.

Pizze si situa in un contesto personale che potrà risultare familiare a molti quindicenni. La categoria di contesto è personale perché si tratta di trovare quale pizza sia più conveniente per l'acquirente in termini economici. Non è difficile da leggere, di conseguenza permette agli studenti di concentrarsi quasi completamente sugli aspetti matematici del compito.

• Figura 1.6 •
Item della prova PIZZE

PIZZE

Una pizzeria prepara due pizze dello stesso spessore, ma di diverse dimensioni. La più piccola ha un diametro di 30 cm e costa 30 zed. La più grande ha un diametro di 40 cm e costa 40 zed.

Quale pizza è più conveniente? Come sei arrivato(a) alla risposta?

Si tratta di interpretare matematicamente degli elementi del mondo reale (rotonda, stesso spessore, dimensioni diverse). La variabile dimensione è definita matematicamente dai diametri delle due pizze. I prezzi sono espressi nella moneta fittizia zed. Dimensione e prezzo sono legati dal concetto prezzo più conveniente.

L'item riguarda diverse branche della matematica. Vi è un elemento geometrico che andrebbe classificato nella categoria di contenuto Spazio e forma. Le pizze possono essere modellate come sottili cilindri circolari, quindi entra in gioco l'area del cerchio. La domanda rientra anche nella categoria di contenuto Quantità considerata l'implicita necessità di raffrontare la quantità di pizza con l'importo in denaro. Tuttavia, la questione principale è la concettualizzazione delle relazioni tra le proprietà delle pizze e il modo in cui le proprietà pertinenti cambiano dalla pizza più grande alla più piccola. Essendo questi gli aspetti centrali del problema, l'item è classificato nella categoria di contenuto Cambiamento e relazioni.

Questo item rientra nella categoria di processo Formulazione. Il passaggio chiave per la soluzione del problema, il più difficile sul piano cognitivo, è la formulazione di un modello matematico che integri il concetto di prezzo più conveniente. Lo studente deve comprendere che, essendo lo spessore della pizza in principio uniforme, ed essendo questo identico nelle due pizze, occorre concentrare l'analisi sulla superficie circolare delle pizze e non sul volume o la massa. La relazione tra quantità di pizza e importo in denaro è così traslata nel concetto di prezzo più conveniente modellato come 'costo per unità di superficie'. Una variante possibile è superficie per costo unitario. In termini matematici, il prezzo più conveniente può essere calcolato direttamente e quindi raffrontato per i due cerchi, ed è inferiore per il cerchio più grande. L'interpretazione traslata nel mondo reale è che la pizza più grande ha il costo più vantaggioso.

Un altro ragionamento, che mostra anche più chiaramente la classificazione dell'item nella categoria Cambiamento e relazioni, consiste nel dire (esplicitamente o implicitamente) che l'area del cerchio aumenta in proporzione al quadrato del diametro, ossia nella proporzione di $(4/3)^2$, mentre il prezzo aumenta solo nella proporzione di $(4/3)$. Dato che $(4/3)^2$ è maggiore di $(4/3)$, la pizza più grande è più conveniente.

La principale difficoltà e chiave di soluzione del problema è la formulazione, pertanto l'item rientra nella categoria di processo formulazione di situazioni in forma matematica. Tuttavia sono presenti anche aspetti degli altri due processi matematici. Il modello matematico, una volta formulato, deve essere utilizzato in modo efficace, secondo un ragionamento adeguato, applicando le pertinenti conoscenze matematiche e il calcolo della superficie e del rapporto. Dopo di che il risultato va interpretato in relazione alla domanda originale.

Per risolvere il problema presentato dalla prova Pizze gli studenti devono attingere alle loro capacità matematiche fondamentali a vari livelli. La Comunicazione interviene a un livello relativamente limitato trattandosi di leggere e interpretare il testo piuttosto chiaro del problema, mentre presenta maggiori difficoltà al momento di presentare e illustrare la soluzione. La necessità di matematizzare la situazione è il punto centrale del problema, in particolare la necessità di formulare un modello che integri il concetto di prezzo più conveniente. Per sviluppare la soluzione, lo studente deve elaborare una rappresentazione degli aspetti pertinenti al problema, inclusa la rappresentazione simbolica della formula per calcolare la superficie, e l'espressione di rapporti che rappresentano il prezzo più conveniente. Le esigenze di ragionamento (decidere che lo spessore può essere ignorato, giustificare l'approccio adottato e il risultato ottenuto) sono significative, e un altro aspetto importante è la capacità di elaborare strategie per controllare i processi di calcolo e modellizzazione. L'utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni è indispensabile considerate le conoscenze concettuali, fattuali e procedurali necessarie per elaborare la geometria del cerchio e il calcolo dei rapporti. L'aspetto utilizzo di strumenti matematici non è particolarmente difficoltoso se lo studente usa in modo efficace la sua calcolatrice.

La figura 1.7 riporta un esempio di risposta all'item Pizze, per illustrare ulteriormente i costrutti del quadro di riferimento.

Si tratta di una risposta da punteggio pieno.



• Figura 1.7 •

Esempio di risposta a un quesito della prova "Pizze"

Lo spessore è lo stesso, perciò posso confrontare le 2 aree

Area della pizza 1 = πr^2
 $= \pi \times 15 \times 15 \text{ cm}^2$
 $= 706,5 \text{ cm}^2$

Area della pizza 2 = πr^2
 $= \pi \times 20 \times 20 \text{ cm}^2$
 $= 1256 \text{ cm}^2$

Prezzo al cm^2 della pizza 1 = $30 \text{ zed} / 706,5 \text{ cm}^2$
 $= 0,04 \text{ zed}/\text{cm}^2$

Prezzo al cm^2 della pizza 2 = $40 \text{ zed} / 1256 \text{ cm}^2$
 $= 0,03 \text{ zed}/\text{cm}^2$

Quindi la pizza 2 conviene!

Un aspetto importante della formulazione

Utilizzo di conoscenze Spazio e forma e Quantità

Utilizzo di un modello matematico per misurare il valore in termini economici

Interpretazione del risultato e traduzione in termini reali

RIFIUTI

L'item Rifiuti (vedi figura 1.8) illustra ulteriori aspetti del quadro per la matematica. Questo item a risposta aperta articolata è stato somministrato durante il ciclo PISA 2003 prima di essere reso pubblico. La media delle risposte corrette nei paesi OCSE era lievemente superiore al 51%, presenta quindi una difficoltà media.

• Figura 1.8 •

Item esemplificativo - Rifiuti

Per un compito a casa sull'ambiente gli studenti hanno raccolto informazioni sul tempo di decomposizione di diversi tipi di rifiuti:

Tipo di rifiuto	Tempo di decomposizione
Buccia di banana	1-3 anni
Buccia d'arancia	1-3 anni
Scatola di cartone	0.5 anni
Chewing gum	20-25 anni
Giornali	Pochi giorni
Bicchieri di polistirene	Oltre 100 anni

Uno studente ha pensato di mostrare i risultati in un grafico a barre.

Fornisci un motivo per cui un grafico a barre non è adatto a visualizzare questi dati.

.....

Il contesto è scientifico, infatti tratta dati di natura scientifica (tempo di decomposizione). La categoria di contenuto è Incertezza e dati perché riguarda principalmente l'interpretazione e presentazione di dati, tuttavia è presente anche l'aspetto Quantità nell'implicita richiesta di considerare le dimensioni relative degli intervalli di tempo presi in esame. La categoria di processo è interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici, infatti si tratta essenzialmente di valutare l'efficacia del risultato matematico (nello specifico un grafico a barre immaginario o abbozzato) nel rappresentare i dati relativi a elementi



contestuali del mondo reale. Il quesito comporta un ragionamento sui dati presentati, l'elaborazione di un pensiero in forma matematica sulla relazione esistente tra i dati e la relativa presentazione, e una valutazione dei risultati. Lo studente deve riconoscere che sarebbe difficile rappresentare dati di questo genere in un grafico a barre per uno dei seguenti motivi: da una parte a causa della grande variabilità dei tempi di decomposizione tra certe categorie di rifiuti (così ampia da non poter essere rappresentata in un grafico a barre), dall'altra parte per l'estrema differenza della variabile temporale secondo il tipo di rifiuto (tale che mostrando nell'asse temporale il periodo più lungo, i periodi più brevi sarebbero invisibili). Risposte come quelle riprodotte alla figura 1.9 hanno ottenuto un credito per questo item.

RISPOSTA 1

"Sarebbe difficile farlo in un grafico a barre perché ci sono dati del tipo 1-3, 1-3, 0,5, ecc. difficili da visualizzare esattamente."

RISPOSTA 2

"Perché c'è una differenza enorme tra il valore massimo e quello minimo, quindi sarebbe difficile visualizzare accuratamente tra 100 anni e pochi giorni."

Per risolvere l'unità Rifiuti gli studenti devono attingere alle seguenti capacità matematiche fondamentali. La comunicazione per leggere il testo e interpretare la tabella, ma in misura anche maggiore perché la risposta deve articolare un breve ragionamento. L'esigenza di matematizzare la situazione è limitata alla necessità di identificare ed estrarre le caratteristiche matematiche di un grafico a barre per ciascun tipo di rifiuto. Lo studente deve interpretare una semplice rappresentazione dei dati in forma di tabella e immaginare una rappresentazione grafica: collegare queste due rappresentazioni è la maggiore difficoltà del problema. L'aspetto ragionamento è relativamente modesto, come pure la necessità di elaborare strategie. L'utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni interviene nelle conoscenze procedurali e fattuali necessarie per immaginare la creazione di un grafico a barre o per farne un rapido abbozzo, e in particolare nella comprensione della scala necessaria per l'asse verticale. L'utilizzo di strumenti matematici non è realmente necessario.

CONCERTO ROCK

La figura 1.10 illustra un altro esempio intitolato Concerto rock. Questo item che richiede di selezionare la risposta (in questo caso risposta multipla semplice) è stato somministrato nella prova su campo che ha preceduto il ciclo 2003, quindi reso pubblico a fini esemplificativi. Considerato che il 28% degli studenti ha risposto correttamente (C), l'item va considerato moderatamente difficile tra quelli utilizzati nel test. Il Concerto rock rientra nel contesto sociale perché riguarda l'organizzazione dell'evento, pur riguardando anche l'esperienza personale di assistere a un concerto rock. Viene classificato nella categoria di contenuto Quantità per i calcoli numerici che richiede, tuttavia presenta anche elementi relativi alla categoria Spazio e forma.

• Figura 1.9 •

Item per il CONCERTO ROCK

Per un concerto rock, è stato riservato al pubblico un campo rettangolare da 100m x 50m. Il concerto è andato tutto esaurito e il campo è pieno di fan, che stanno in piedi.

Quale di questi numeri è la stima più probabile del numero di persone che hanno assistito al concerto?

- A. 2 000
- B. 5 000
- C. 20 000
- D. 50 000
- E. 100 000

Sono chiamate in causa tutte le tre categorie di processo, ma la difficoltà principale consiste nella formulazione di situazioni in forma matematica, infatti chiede di dare un senso alle informazioni contestuali fornite (dimensione e forma del campo, concerto tutto esaurito, i fan assistono in piedi) e traslarle in una forma matematica utile. Occorre inoltre identificare informazioni mancanti ma che possono essere ragionevolmente ricavate sulla base di deduzioni dalla vita reale. In particolare occorre elaborare un modello per l'area ricoperta da ciascun spettatore o gruppo di spettatori. Matematicamente, si tratta



di utilizzare concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici per collegare l'area del campo all'area occupata da uno spettatore o gruppo di spettatori, procedendo ai relativi raffronti quantitativi, e quindi interpretare, applicare e valutare dei risultati matematici per verificare la plausibilità della soluzione o considerare le opzioni di risposta rispetto ai risultati matematici ottenuti e ai calcoli eseguiti.

Alternativamente, si potrebbero immaginare gli spettatori disposti uniformemente in file e stimare il loro numero moltiplicando il numero stimato di spettatori per fila per il numero di file. Gli studenti più abili nella formulazione di modelli matematici potranno apprezzare l'efficacia di questo modello righe – colonne, nonostante l'evidente contrasto con il comportamento dei fan a un concerto rock. La risposta corretta non è legata all'una o all'altra delle possibili modalità di soluzione.

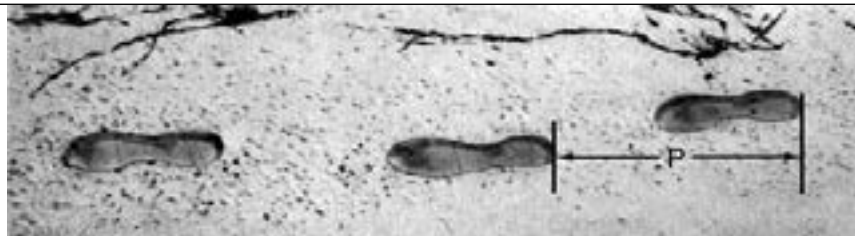
Le capacità matematiche fondamentali intervengono in questo quesito come segue. L'esigenza di comunicazione è relativamente ridotta, infatti basta leggere e interpretare il testo. L'importanza matematica di termini quali rettangolare e dimensione, la frase era tutto esaurito, e l'istruzione di stimare devono essere interpretate e comprese. La conoscenza del mondo reale può aiutare in questo contesto. L'esigenza di matematizzazione è elevata, infatti per risolvere il problema è necessario fare delle deduzioni sulla superficie che una persona in piedi può occupare, e creare un modello di base del tipo (numero di spettatori) \times (superficie media per spettatore) = (area del campo). Per farlo, lo studente deve rappresentare la situazione mentalmente o con un diagramma, formulando il modello che collega la superficie occupata da uno spettatore con l'area del campo. La necessità di elaborare una strategia compare in varie fasi del processo di soluzione del problema, per esempio nel decidere l'approccio da adottare, immaginare quale sia il tipo di modello più utile per individuare la superficie occupata da una persona, e quando applicare se necessario delle procedure di verifica e convalida. Una strategia potrebbe essere quella di assumere un'area per ogni persona, moltiplicarla per il numero di persone proposto in ciascuna opzione di risposta e raffrontare le soluzioni con le condizioni descritte nel quesito. D'altra parte si può fare anche il contrario, partire con la superficie fornita e procedere all'inverso, utilizzando ciascuna opzione di risposta per calcolare la corrispondente superficie per persona, quindi decidere quale risultato corrisponde meglio ai criteri del quesito. L'utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni interviene nell'attuazione di qualsiasi strategia adottata, nell'interpretazione e utilizzo delle dimensioni fornite e nell'esecuzione dei calcoli necessari a creare una relazione tra l'area del campo e la superficie coperta da un individuo. L'aspetto ragionamento e argomentazione entra in gioco con la necessità di riflettere sulla relazione tra il modello elaborato, la soluzione ottenuta e il contesto reale prima di validare il modello e dare la risposta corretta. L'utilizzo di strumenti matematici non è realmente necessario.

ANDATURA

L'unità Andatura, (vedi figura 1.11) presenta una relazione algebrica poco intuitiva ma ben stabilita tra due variabili, basata sull'osservazione della camminata naturale di un gran numero di persone, e pone agli studenti due quesiti per i quali essi devono attingere alle loro competenze di algebra. Nella seconda domanda, le capacità di pensiero strategico, capacità di ragionamento e argomentazione richieste possono essere difficili per molti quindicenni. Gli item sono stati somministrati nell'indagine PISA 2003 prima di essere resi pubblici e successivamente utilizzati come item esemplificativi nel quadro di riferimento PISA 2009 e in altre pubblicazioni. Ambedue i quesiti chiedono agli studenti di basarsi sulle informazioni fornite per costruire una risposta, e ambedue ricadono nelle stesse categorie: la categoria di contenuti cambiamento e relazioni, poiché riguardano le relazioni tra variabili, in questo caso espresse in forma algebrica; la categoria di contesto personale, poiché riguardano questioni che sono direttamente legate all'esperienza e alla prospettiva di una persona; e la categoria di processo utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici, poiché i problemi sono espressi in termini che già presentano una struttura matematica e la soluzione è costituita principalmente da manipolazioni intramatematiche di concetti e oggetti matematici.

• Figura 1.10 •

Item per l'unità ANDATURA



La figura mostra le orme di un uomo che cammina. La lunghezza P del passo è la distanza tra la parte posteriore di due orme consecutive.



Per gli uomini, la formula $\frac{n}{P} = 140$ fornisce una relazione approssimativa tra n e P dove:

n = numero di passi al minuto, e

P = lunghezza del passo in metri.

DOMANDA 1

Se la formula si applica all'andatura di Enrico ed Enrico fa 70 passi al minuto, qual è la lunghezza del passo di Enrico? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....

.....

DOMANDA 2

Bernardo sa che la lunghezza del suo passo è 0,80 metri. La formula viene applicata all'andatura di Bernardo. Calcola la velocità a cui cammina Bernardo in metri al minuto e in chilometri all'ora. Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....

.....

Nell'indagine 2003 la domanda 1 ha registrato un tasso di risposte corrette a livello internazionale del 36%, il che la rende più difficile rispetto al 70% circa degli item somministrati in quella occasione. La cosa è sorprendente perché dal punto di vista matematico si richiede solo di sostituire il valore $n=70$ nella formula e procedere ad alcune elaborazioni algebriche piuttosto facili per trovare il valore di P . D'altra parte illustra bene quanto spesso osservato nel corso delle indagini PISA: quando le domande sono inquadrare in un contesto reale, anche se le componenti matematiche sono presentate chiaramente, gli studenti quindicenni spesso hanno difficoltà a mettere in pratica le loro conoscenze e competenze matematiche.

Le capacità matematiche fondamentali intervengono in questo quesito come segue. La comunicazione interviene dapprima nella lettura e comprensione dello stimolo, quindi nell'articolazione della soluzione e illustrazione della procedura seguita. Non vi è una reale esigenza di matematizzazione, infatti il modello matematico è fornito in una forma che dovrebbe essere familiare alla maggior parte degli studenti quindicenni. L'esigenza di rappresentazione è notevole, considerato che lo stimolo include un elemento grafico, un testo e un'espressione algebrica che devono essere messe in relazione tra di loro. Minima al contrario l'esigenza di elaborare una strategia, infatti tutta la strategia necessaria è chiaramente espressa nella domanda. Lo stesso vale per ragionamento e argomentazione, sempre perché il compito è chiaramente definito e gli elementi necessari sono evidenti. L'utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici entra in gioco al momento di effettuare la sostituzione e manipolare l'espressione in modo da rendere P il soggetto dell'equazione.

La domanda 2 è più difficile. Sul piano internazionale la media di risposte corrette è del 20%, in altre parole rientra nel 10% degli item più difficili somministrati nel ciclo 2003. La domanda richiede notevoli capacità di elaborare una strategia, infatti è complessa e prevede numerosi passaggi i cui risultati devono sempre essere visti in relazione all'obiettivo finale: P è conosciuto quindi n può essere ricavato dall'equazione data; moltiplicando n per P si ottiene la velocità in metri al minuto; dopo di che entra in gioco il ragionamento proporzionale per cambiare le unità in chilometri / ora. La domanda prevedeva tre livelli di punteggio così da dare credito anche a soluzioni parziali. La differenza percentuale di risposte corrette tra le domande 1 e 2 si può probabilmente spiegare descrivendo le diverse capacità matematiche fondamentali cui gli studenti devono attingere. Il livello di comunicazione richiesto a livello della lettura è simile nelle due domande, ma nella 2 occorre utilizzare la figura per collegare esplicitamente un passo e la lunghezza di passo fornita, inoltre per la presentazione della risoluzione serve un livello più elevato di capacità di comunicazione espressiva. La domanda 2 presenta un'ulteriore esigenza di matematizzazione perché per risolvere il problema è necessario elaborare un modello proporzionale per calcolare la velocità di Bernardo nelle unità richieste. Un simile processo di risoluzione richiede l'attuazione di meccanismi efficaci e in più passaggi, di conseguenza la capacità di elaborare una strategia entra in gioco a un livello assai superiore rispetto alla domanda 1. Questo vale anche per l'aspetto rappresentazione, infatti occorre lavorare più attivamente sulla rappresentazione algebrica. L'attuazione della strategia individuata e l'uso di rappresentazioni comporta l'utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici nelle manipolazioni algebriche e nell'applicazione di proporzioni e calcoli aritmetici alla conversione di unità. La categoria ragionamento e argomentazione è costantemente presente nel processo necessario a giungere alla soluzione. L'aspetto utilizzo di strumenti matematici non è particolarmente difficoltoso se lo studente usa la sua calcolatrice in modo efficace.



CARPENTIERE

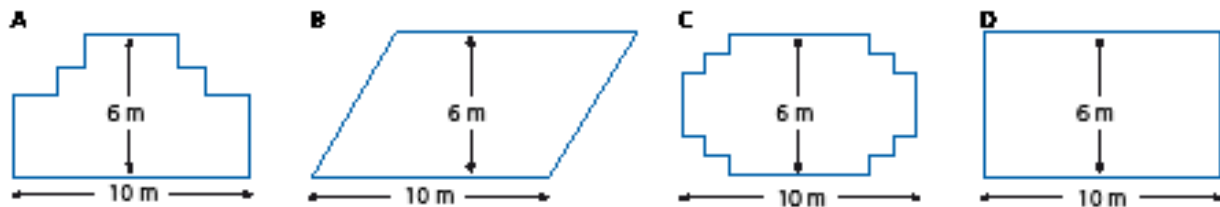
L'unità Carpentiere (figura 1.12) è stata somministrata durante i cicli PISA 2000 e 2003 prima di essere resa pubblica. È l'illustrazione di un formato di risposta detto 'a scelta multipla complessa' perché gli studenti devono selezionare una risposta tra diverse opzioni per ciascuna domanda. In questo caso veniva assegnato un punteggio pieno agli studenti che rispondevano che tutti i progetti, tranne il B, potevano essere realizzati con le tavole a disposizione.

La categoria di contenuto è Spazio e forma, infatti il quesito tratta le proprietà delle forme. Trattandosi del lavoro di un carpentiere, la categoria di contesto è occupazionale. Quanto alla categoria di processo, l'item ricade sotto utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici, infatti si tratta soprattutto di applicare la conoscenza dei procedimenti a oggetti matematici ben definiti; tuttavia è richiesto anche un certo grado di interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici se si considera la necessità di collegare gli oggetti matematici all'elemento contestuale: il vincolo imposto dalla lunghezza delle tavole disponibili.

• Figura 1.11 •

Item esemplificativo CARPENTIERE

Un carpentiere ha 32 metri di tavole di legno e vuole fare il recinto a un giardino. Per il recinto prende in considerazione i seguenti progetti.



Indica per ciascun progetto se è possibile realizzarlo con 32 metri di tavole. Fai un cerchio intorno a "Sì" o a "No".

Progetto	Utilizzando questo progetto, si può realizzare il recinto con 32 metri di tavole?
Disegno A	Sì / No
Disegno B	Sì / No
Disegno C	Sì / No
Disegno D	Sì / No

Questo è risultato essere uno degli item più difficili nell'indagine PISA 2003, con una percentuale di risposte corrette di poco inferiore al 20%. Per risolverlo occorre applicare conoscenze di geometria e capacità di ragionamento. Le informazioni fornite sono sufficienti per calcolare il perimetro esatto dei disegni A, C e D, che è di 32 metri nei tre casi. Per il disegno B le informazioni fornite non sono sufficienti, quindi è necessario un approccio diverso. Si può ragionare che mentre le componenti 'orizzontali' delle forme sono equivalenti, i lati obliqui del disegno B sono più lunghi della somma delle componenti 'verticali' delle altre forme.

La capacità di comunicazione è sollecitata nella lettura e comprensione della domanda, e per collegare le informazioni date alla rappresentazione grafica delle quattro aiuole. Il compito è presentato in forma chiaramente matematica, quindi non richiede matematizzazione. Le considerazioni pertinenti al mondo reale, per esempio la lunghezza delle tavole per il recinto e la geometria degli angoli, non pongono problemi in questo contesto. Quella di ragionamento e argomentazione è la principale capacità richiesta per capire che il perimetro B è troppo grande e per capire che le componenti 'verticali' del disegno A di per sé non sono conosciute, ma che la lunghezza 'verticale' totale è conosciuta (lo stesso vale per il disegno C sia in verticale sia in orizzontale). Riconoscere che le informazioni necessarie sul perimetro si possono reperire nonostante la mancanza di talune singole lunghezze comporta la capacità di elaborare una strategia. L'utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici serve per la comprensione e manipolazione del perimetro delle forme presentate, sia per le proprietà dei lati, sia per l'addizione della lunghezza dei lati. L'utilizzo di strumenti matematici non è realmente necessario.

Bibliografia

- Bennett, R. (2003), *Online Assessment and the Comparability of Score Meaning*, Educational Testing Service, Princeton, New Jersey, www.ets.org/Media/Research/pdf/RM-03-05-Bennett.pdf.
- Bennett, R.E., J. Braswell, A. Oranje, B. Sandene, B. Kaplan and F. Yan (2008), "Does it Matter if I Take My Mathematics Test on Computer? A Second Empirical Study of Mode Effects in NAEP", *Journal of Technology, Learning, and Assessment*, No. 6, Vol. 9.
- Common Core State Standards Initiative (2010), *Common Core State Standards for Mathematics*, Common Core State Standards Initiative, Washington, D.C., http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.
- Devlin, K. (1994), *Mathematics: The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind and the Universe*, W. H. Freeman Scientific American Library, New York.
- Hoyles, C., A. Wolf, S. Molyneux-Hodgson and P. Kent (2002), *Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council*, Project Report, Institute of Education, University of London, Science, Technology and Mathematics Council, London, <http://eprints.ioe.ac.uk/1565/1/Hoyles2002MathematicalSkills.pdf>.
- Mason, B., M. Patry and D. Berstein (2001), "An examination of the equivalence between non-adaptive computer based and traditional testing", *Journal of Education Computing Research*, No. 24, Vol. 1, pp. 29-39.
- Moore, D. (1997), "New pedagogy and new content: The case of statistics", *International Statistical Review*, No. 65, Vol. 2, pp. 123-137.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, Virginia, www.nctm.org/standards/.
- Niss, M. and T. H. Jensen (2002), *Kompetencer og matematikl ring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, Uddannelsesstyrelsens temah fteserie, No. 18, Ministry of Education, Copenhagen, <http://pub.uvm.dk/2002/kom/>.
- Niss, M. (2003), "Mathematical Competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project", in Gagatsis A. and S. Papastavridis (eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, The Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, Athens, pp. 115-124, http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf.
- Niss, M., W. Blum and P. Galbraith (2007), "Introduction", in Blum, W., P. Galbraith, H.-W. Henn and M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education (The 14th ICMI Study)*, Springer, New York, pp. 3-32.
- Niss, M. and T. H jgaard (eds.) (2011), "Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark", Ministry of Education, Report No. 485, Roskilde University, Roskilde, https://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf.
- OECD (2003), *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, PISA, OECD Publishing.
- OECD (2010), *Pathways to Success: How knowledge and skills at age 15 shape future lives in Canada*, PISA, OECD Publishing, www.oecd.org/dataoecd/59/35/44574748.pdf.
- Qualifications and Curriculum Authority (2007), "Mathematics: Programme of study for key stage 3 and attainment targets", Qualifications and Curriculum Authority, London, <http://media.education.gov.uk/assets/files/pdf/q/mathematics%202007%20programme%20of%20study%20for%20key%20stage%203.pdf>.
- Richardson M., J.-A. Baird, J. Ridgway, M. Ripley, D. Shorrocks-Taylor and M. Swan (2002), "Challenging Minds? Students' perceptions of computer-based World Class Tests of problem solving", *Computers in Human Behavior*, Vol. 18, Issue 6, November, pp. 633-649.
- Sandene, B., N. Horkay, R. Bennett, N. Allen, J. Braswell, B. Kaplan, and A. Oranje (2005), *Online Assessment in Mathematics and Writing: Reports From the NAEP Technology Based Assessment Project*, Research and Development Series (NCES 2005-457), U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, Washington, D.C., U.S. Government Printing Office, www.nces.ed.gov/nationsreportcard/pdf/studies/2005457_1.pdf.
- Stacey, K. and D. Wiliam (forthcoming), "Technology and Assessment in Mathematics", in Clements M. A. (Ken), A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick and F. Leung (eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education*, Springer, pp. 721 - 752.
- Steen, L. (1990), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*, National Academy Press Washington, D.C.
- Thomson, S. and K. Hillman (2010), *Against the Odds: Influences on the Post-School Success of 'Low Performers'*, NCVER, Adelaide, www.ncver.edu.au/publications/2285.html.
- Turner, R. (2012), "Some Drivers of Test Item Difficulty in Mathematics", Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), 13-17 April 2012, Vancouver, <http://research.acer.edu.au/pisa/4/>.
- Turner, R. and R.J. Adams (2012), "Some drivers of test item difficulty in mathematics: an analysis of the competency rubric", Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), 13-17 April 2012, Vancouver, <http://research.acer.edu.au/pisa/7/>.



Turner, R., J. Dossey, W. Blum and M. Niss (forthcoming), "Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA", in Prenzel, M., M. Kobarg, K. Schöps and S. Rönnebeck (eds.), *Research on PISA: Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009*, Springer, New York. pp. 23–27.

Watson, J.M. and R. Callingham (2003), "Statistical literacy: A complex hierarchical construct", *Statistics Education Research Journal*, No. 2, Vol. 2, pp. 3-46.